

**UNIVERSIDAD NACIONAL AGRARIA  
LA MOLINA  
ESCUELA DE POSGRADO  
DOCTORADO EN RECURSOS HÍDRICOS**



**“MODELACIÓN ESTOCÁSTICA DE LOS CAUDALES EN  
LA CUENCA DEL RIO SANTA”**

**Presentada por:**

**ABELARDO MANRIQUE DÍAZ SALAS**

**TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE *DOCTORIS PHILOSOPHIAE*  
EN RECURSOS HÍDRICOS**

**Lima - Perú**

**2017**

**UNIVERSIDAD NACIONAL AGRARIA  
LA MOLINA**

**ESCUELA DE POSGRADO  
DOCTORADO EN RECURSOS HÍDRICOS**

**“MODELACIÓN ESTOCÁSTICA DE LOS CAUDALES EN  
LA CUENCA DEL RIO SANTA”**

**TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE**

*Doctoris Philosophiae (Ph. D.)*

**Presentada por:**

**ABELARDO MANRIQUE DÍAZ SALAS**

**Sustentada y aprobada ante el siguiente jurado:**

Ph. D. Eusebio Ingol Blanco  
**PRESIDENTE**

Ph. D. Waldo Lavado Casimiro  
**PATROCINADOR**

Dr. Jesús Abel Mejía Marcacuzco  
**MIEMBRO**

Dr. Néstor Montalvo Aquiñigo  
**MIEMBRO**

Ph. D. Manuel Paulet Iturri  
**MIEMBRO EXTERNO**

A mi esposa Flor Vergara Tinoco y  
a mis hijos Abelardo y Pablo.  
A mis Padres Pablo y Teodora.  
A mis hermanos Frida, Pablo y Gloria.

## **AGRADECIMIENTOS**

- Al Dr. Waldo Lavado Casimiro, patrocinador de la presente tesis.
- A la Facultad de Ciencias Agrarias y a la “Universidad Santiago Antúnez de Mayolo” por darme las facilidades para terminar el estudio de Doctorado.
- A todos los docentes de la Escuela de Post Grado de la especialidad de Ingeniería de Recursos Hídricos de la Universidad Nacional Agraria La Molina.

## RESUMEN

La interpretación del comportamiento temporal y espacial de las descargas medias anuales o mensuales, se ha realizado a través de modelos estocásticos de series estacionarias, donde se ha encontrado el modelo autorregresivo de orden 1 AR(1) como adecuado para el caso de caudales medios anuales y al modelo periódico autorregresivo de orden 1 PAR(1), para el caso de caudales medios mensuales.

La interpretación regional del comportamiento temporal y espacial de las descargas medias anuales se ha realizado mediante un modelo regional que está en función del área de la cuenca del porcentaje del área glaciar y del parámetro regional anual  $\phi_1$ ; la componente aleatoria  $\varepsilon_t$  que depende de la variancia del error del modelo AR(1) se estima en función al área de la cuenca, del porcentaje de área glaciar. La interpretación regional del comportamiento temporal y espacial de las descargas mensuales se ha realizado en función del área de la cuenca del porcentaje del área glaciar y del parámetro del parámetro regional mensual  $\phi_{1,t}$ ; la componente aleatoria  $\varepsilon_{v,t}$  depende de la variancia mensual del error del modelo PAR(1), se estima en función al área de la cuenca y porcentaje del área glaciar. Estas variables aleatorias tienen media cero y variancia constante.

Para verificar la validación del modelamiento se ha comparado las estadísticas media y variancia de las series históricas y de las series generadas, a nivel anual y mensual, donde se ha encontrado resultados aceptables, es decir, se puede inferir que los datos provienen de una misma población.

**Palabras Clave:** Modelamiento estocástico. Modelamiento de las series hidrológicas. Generación sintética de caudales medios.

## ABSTRACT

The interpretation of temporal and spatial behavior average unloading both annual or monthly were done through stochastic models of stationary series, where we have found the autoregressive model of proportion 1 AR (1) convenient for the case of annual average water flow and the periodical autoregressive model of proportion 1 PAR (1) for the case of monthly average water flow.

The regional interpretation for temporal and spatial behavior of annual average unloading were done through a regional model which is in accordance with the area of the basin, percentage of glacier area and the  $\phi_1$  annual regional parameter, the random component  $\varepsilon_t$  is estimated based on the area of the basin, which depends on the error variance model AR (1). The regional behavior from the monthly average unloadings were done in accordance with the area the basin, a percentage of glacier area and the monthly regional parameter  $\phi_{1,t}$ , the random component  $\varepsilon_{v,t}$  is estimated based on the area of the basin, which depends on the monthly error variance model PAR (1).

To verify the validity of the modeling we have compared average statistics and variance of the historical series and of the generated series, both at the annual and monthly level and where we have found acceptable results; that is to say, that we can infer that these data come from the same population.

Keywords: stochastic modeling, hydrological series modeling, . Synthetic generation of volume of water.

## ÍNDICE

	<b>Pág.</b>
DEDICATORIA	i
AGRADECIMIENTO	ii
RESUMEN	iii
ABSTRACT	iv
ÍNDICE GENERAL	v
ÍNDICE DE CUADROS	xiv
ÍNDICE DE FIGURAS	xvii
ÍNDICE DE ANEXOS	xx
<b>I INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
1.1 OBJETIVOS	3
1.1.1 OBJETIVOS GENERALES	3
1.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	3
1.2 JUSTIFICACIÓN	3
<b>II. REVISIÓN DE LITERATURA</b>	<b>5</b>
2.1 ANTECEDENTES	5
2.2 MODELOS HIDROLÓGICOS	6
2.2.1 MODELO DETERMINÍSTICO	7
a. Modelo agregado	7
b. Modelo distribuido	7
2.2.2 MODELO ESTOCÁSTICO	9
2.3 PROCESOS ESTOCÁSTICOS	9
2.3.1 SERIES DE TIEMPO O SERIES CRONOLÓGICAS	10
a. Análisis de las series temporales	10
2.3.2 SERIES DE TIEMPO ESTACIONARIAS	11
a. Prueba de estacionaridad	12

i.	Análisis gráfico	12
ii.	Prueba del correlograma	12
ii.1	Covariancia	12
ii.2	Autocorrelación	13
ii.3	Función de autocorrelación (FAC)	14
ii.4	Función de autocorrelación parcial (FACP)	14
iii.	Prueba de raíces unitarias	14
2.3.3	PROCESO DE RUIDO BLANCO	15
2.3.4	MODELOS DE SERIES DE TIEMPO	15
a.	Modelos lineales de las series de tiempo	16
i.	Modelos autorregresivos (AR)	16
ii.	Modelos de medias móviles (MA)	18
iii.	Modelos mixtos autorregresivos y medias móviles. ARMA (p, q)	19
b.	Operadores de retardo	21
2.3.5	ESTIMACIÓN Y VALIDACIÓN DEL MODELO	21
a.	Identificación	21
b.	Estimación	23
c.	Validación o selección del modelo	24
i.	Criterio de información de Akaike modificado (AICC)	24
ii.	Criterio de información de Schwarz modificado (SIC)	25
d.	Diagnos del modelo y predicción	25
2.4	SERIES DE TIEMPO HIDROLÓGICO	27
2.4.1	ANALISIS DE LAS SERIES DE TIEMPO HIDROLOGICO	28
a.	Métodos para el análisis de las series de tiempo hidrológico	28
2.4.2	CLASIFICACIÓN DE LAS SERIES DE TIEMPO HIDROLÓGICO	29
a.	Series hidrológicas correlacionadas y no correlacionadas	29
b.	Series hidrológicas estacionarias y no estacionarias	30
2.4.3	COMPONENTES DE LA ESTRUCTURA DE LAS SERIES DE TIEMPO HIDROLÓGICO	31



a.	Salto y tendencias	31
i.	Saltos	31
ii.	Tendencias	31
b.	Estacionalidad	32
2.4.4	ESTADÍSTICAS DE LA SERIE DE TIEMPO HIDROLÓGICO	33
a.	Estadísticas generales de la muestra	33
b.	Estadísticas estacionales de la muestra	34
2.5	MODELAMIENTO DE LAS SERIES DE TIEMPO HIDROLÓGICO	34
2.5.1	MODELAMIENTO DE LAS SERIES NO PERIÓDICAS	35
2.5.2	MODELAMIENTO DE SERIES PERIÓDICAS SIMPLES	35
a.	Modelos autorregresivos periódicos (PAR)	35
b.	Modelos autorregresivos periódicos y de media móvil (PARMA)	36
2.6	ANÁLISIS DE INCERTIDUMBRE	37
2.6.1	SIMULACIÓN DE MONTECARLO	38
2.6.2	DIAGRAMA DE CAJA	38
<b>III.</b>	<b>MATERIALES Y MÉTODOS</b>	<b>39</b>
3.1	MATERIALES	39
3.1.1	DESCRIPCIÓN DE LA CUENCA DEL RIO SANTA	39
3.2	MÉTODOS	42
3.2.1	RECOPIACIÓN DE DATOS	42
3.2.2	TRATAMIENTO DE DATOS	42
a.	Análisis de consistencia	42
i.	Análisis de salto	42
ii.	Análisis de tendencia	46
b.	Completación y extensión de datos	47
3.2.3	PRUEBA DE ESTACIONARIDAD	49
3.2.4	IDENTIFICACIÓN DE LOS POSIBLES MODELOS ESTOCÁSTICOS	49
3.2.5	ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE LOS MODELOS ESTOCÁSTICOS IDENTIFICADOS	50

3.2.6 VALIDACIÓN ESTADÍSTICA O SELECCIÓN DE MODELO ESTOCÁSTICO ADECUADO	50
3.2.7 EVALUACIÓN DEL MODELO SELECCIONADO Y PREDICCIÓN	50
a. Evaluación del modelo seleccionado	50
b. Predicción con el modelo seleccionado	51
i. Estimación de parámetros $\mu$ ( $\mu$ ), $\phi$ ( $\phi$ ) y zeta ( $\theta$ )	51
ii. Verificación de la estacionaridad de los modelos seleccionados	51
iii. Generación de números aleatorios $\varepsilon_t$	54
3.2.8 VERIFICACIÓN DE LA BONDAD DE AJUSTE DEL MODELO ESTOCÁSTICO	54
a. Prueba de medias	55
b. Prueba de homogeneidad de varianzas	55
c. Simulación de Monte Carlo	56
d. Diagrama de caja	56
3.2.9 REGIONALIZACIÓN DE LOS MODELOS ESTOCÁSTICOS DE CAUDALES MEDIOS ANUALES Y MENSUALES	56
a. Modelo estocástico regional para caudales medios anuales	57
b. Modelo estocástico regional para caudales mensuales	57
<b>IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN</b>	<b>58</b>
4.1 CONSISTENCIA DE LA INFORMACIÓN	58
4.1.1 RESULTADOS	58
a. Salto	58
b. Tendencia	61
4.1.2 DISCUSIÓN	61
4.2 MODELAMIENTO ESTOCÁSTICO	61
4.2.1 MODELAMIENTO ESTOCÁSTICO DE LA SERIE DE CAUDALES PROMEDIOS ANUALES EN LA CUENCA DEL RIO SANTA	62
a Resultados	62
1 Prueba de estacionaridad de los caudales promedios anuales en la cuenca del río Santa	62

2	Identificación de los posibles modelos estocásticos adecuados para los caudales promedios anuales en los afluentes del río Santa	62
3	Estimación de los parámetros de los modelos identificados	63
4	Validación estadística o selección del modelo adecuado	63
5	Evaluación del modelo seleccionado	63
6	Verificación de la estacionaridad del modelo seleccionado AR(1)	65
7	Generación de caudales medios anuales con el modelo AR(1) en los afluentes del río Santa	65
8	Verificación de la bondad de ajuste del modelo estocástico AR (1)	66
9	Regionalización de los parámetros del modelo estocástico AR(1) en la cuenca del río Santa	66
9.1	Regionalización de la descarga media anual ( $\mu$ ) en la cuenca del río Santa	68
9.2	Regionalización del parámetro $\phi_1$ del modelo AR (1) en la cuenca del río Santa	69
9.3	Regionalización del parámetro de la desviación estándar del error ( $S_e$ ) del modelo AR(1)	69
10	Modelo regional para las descargas promedios anuales de la cuenca del río Santa	71
11	Verificación de la bondad de ajuste del modelo Regional AR(1)	71
b	Discusión	73
1.	Prueba de estacionaridad de los caudales promedios anuales en la cuenca del río Santa	73
2.	Identificación de los posibles modelos estocásticos adecuados para los caudales promedios anuales en los afluentes del río Santa	73
3.	Estimación de los parámetros de los modelos identificados	73

4.	Validación estadística o selección del modelo adecuado	73
5.	Evaluación del modelo seleccionado	74
6.	Verificación de la estacionaridad del modelo seleccionado AR(1)	74
7.	Generación de caudales medios anuales con el modelo AR(1) en los afluentes del río Santa	74
8.	Verificación de la bondad de ajuste del modelo estocástico AR (1)	74
9.	Regionalización de los parámetros del modelo estocástico AR(1) en la cuenca del río Santa	75
9.1	Regionalización de la descarga media anual ( $\mu$ ) en la cuenca del río Santa	75
9.2	Regionalización del parámetro $\phi_1$ del modelo AR (1) en la cuenca del río Santa	75
9.3	Regionalización del parámetro desviación estándar del error (Se) del modelo AR(1)	75
10.	Modelo regional para las descargas promedios anuales de la cuenca del río Santa	75
11.	Verificación de la bondad de ajuste del modelo regional	75
4.2.2 MODELAMIENTO ESTOCÁSTICO DE LA SERIE DE CAUDALES MEDIOS MENSUALES DE LA CUENCA DEL RIO SANTA		76
a.	Resultados	
1.	Prueba de estacionaridad de los caudales medios mensuales en los afluentes del río Santa	76
2.	Identificación del modelo estocástico adecuado para los caudales mensuales en los afluentes del río Santa	76
3.	Estimación de los parámetros de los modelos identificados	78
4.	Validación estadística o selección del modelo adecuado	79

5.	Evaluación del modelo seleccionado PAR(1)	80
6.	Generación de caudales mensuales con el modelo PAR (1) en los afluentes del río Santa	81
7.	Verificación de la bondad de ajuste del modelo estocástico PAR (1)	87
8.	Regionalización de los parámetros del modelo estocástico periódico PAR (1) de los caudales mensuales en la cuenca del río Santa	94
8.1	Regionalización de la descarga media mensual en la cuenca del río Santa $\mu_t$	94
8.2	Regionalización del parámetro $\phi$ ( $\phi(1,t)$ ) del modelo PAR (1) de los caudales medios mensuales en la cuenca del río Santa	94
8.3	Regionalización de la desviación estándar del error $S_t$	94
9.	Modelo regional de las descargas mensuales ( $\mu(v,t)$ ) de la cuenca del río Santa	95
10.	Verificación de la bondad de ajuste del modelo regional de las descargas medias mensuales	96
b.	Discusión	96
1.	Prueba de estacionaridad de los caudales medios mensuales en los afluentes del río Santa	96
2.	Identificación del modelo estocástico adecuado para los caudales mensuales en los afluentes del río Santa	96
3.	Estimación de los parámetros de los modelos identificados	96
4.	Validación estadística o selección del modelo adecuado	103
5.	Evaluación del modelo seleccionado PAR(1)	103
6.	Generación de caudales mensuales con el modelo PAR (1) en los afluentes del río Santa	103
7.	Verificación de la bondad de ajuste del modelo estocástico PAR (1)	103

8.	Regionalización de los parámetros del modelo estocástico periódico PAR (1) de los caudales mensuales en la cuenca del río Santa	104
8.1	Regionalización de la descarga media mensual en la cuenca del río Santa $\mu_t$	104
8.2	Regionalización del parámetro $\phi_1(\phi_1(t))$ del modelo PAR (1) de los caudales medios mensuales en la cuenca del río Santa	104
8.3	Regionalización de la desviación estándar del error $S_t$	104
9.	Modelo estocástico regional de las descargas medias mensuales ( $\mu_{(v,t)}$ ) de la cuenca del río Santa	105
10.	Verificación de la bondad de ajuste del modelo regional de las descargas medias mensuales	105
4.2.3	ANÁLISIS DE INCERTIDUMBRE	105
a.	Resultados	105
b.	Discusión	119
<b>V.</b>	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>121</b>
<b>VI.</b>	<b>RECOMENDACIONES</b>	<b>122</b>
<b>VII.</b>	<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>123</b>
<b>ANEXOS</b>		<b>126</b>
1	Datos de caudales ( $m^3/s$ ) de los afluentes del río Santa	127
2	Solución de las ecuaciones de Yule - Walker	136
3	Correlogramas de los datos observados	138
4	Parámetros de los modelos autorregresivos AR(p)	143
5	Parámetros de los modelos de medias móviles MA (q)	148
6	Parámetros de los modelos autorregresivos y de medias móviles ARMA (p,q)	152
7	Operador de retardos	154

8	Comparación gráfica de las series históricas y generadas con el modelo AR(1) en los afluentes del río Santa	158
9	Validación o selección del modelo estocástico adecuado para los caudales medios mensuales de la cuenca del río Santa	161
10	Contraste de Dickey – Fuller	170

## ÍNDICE DE CUADROS

N°		Pág.
1	Modelos para las series de tiempo	15
2	Patrones teóricos de FAC y FACP	23
3	Disponibilidad de datos de caudales medios mensuales de las cuencas en estudio	40
4	Parámetros geomorfológicos de las cuencas en estudio	40
5	Parámetros de los modelos estocásticos	52
6	Ecuaciones para hallar la variancia del ruido blanco ( $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ )	54
7	Resultados de la evaluación de tendencias	61
8	Prueba de raíz unitaria de las descargas medias anuales	62
9	Varianza del ruido blanco o variancia del error $\sigma_\varepsilon^2$	63
10	Validación estadística o selección del modelo estocástico adecuado para los caudales medios anuales de los afluentes del río Santa	64
11	Parámetros media ( $\mu$ ), fi ( $\phi_1$ ) y varianza ( $\gamma_0$ ) de las cuencas en estudio del modelo ARMA (1,0)	64
12	Pruebas de contraste de los residuos del modelo ARMA(1,0)	65
13	Raíces de los polinomios autorregresivos del modelo ARMA(1,0)	65
14	Modelo estocástico ARMA (1,0) en las estaciones en estudio	66
15	Estadísticas de los datos históricos y generados con AR(1) en las cuencas en estudio	67
16	Prueba de medias y de homogeneidad de varianzas de las descargas medias anuales históricas y generadas con el modelo AR(1)	67
17	Descargas medias anuales generadas e históricas, el área de la cuenca y porcentaje de glaciares	68
18	Desviación estándar anual de descargas generadas e históricas y el área de la cuenca	69
19	Prueba de medias y de variancias anuales históricas y generadas (ecuación 98)	72
20	Prueba de raíz unitaria de las descargas mensuales de la cuenca el río Santa	77



21	Varianza del ruido blanco o variancia del error $\sigma_{\varepsilon}^2$ de las descargas mensuales	79
22	Validación estadística o selección del modelo estocástico adecuado para los caudales mensuales de los afluentes del río santa	79
23	Parámetros: media mensual ( $\mu_{\tau}$ ) de las cuencas en estudio: modelo PAR(1)	82
24	Parámetros: $fi(\phi_{1,\tau})$ mensual de las cuencas en estudio: modelo PAR (1)	82
25	Pruebas de contraste de los residuos del modelo PAR(1)	83
26	Prueba de medias y de homogeneidad de variancias de las descargas mensuales históricas y generadas (modelo PAR(1)) en la cuenca del río Santa	88
27	Modelo regional adecuado para las descargas medias mensuales ( $\mu_{\tau}$ ) de la cuenca del río Santa	94
28	Correlación de la desviación estándar regional $S_{v,t}$ de las descargas mensuales de la cuenca del río Santa	95
29	Modelo regional de las descargas mensuales ( $\mu_{v,t}$ ) en la cuenca del río Santa	95
30	Prueba de medias y de homogeneidad de variancias de las descargas medias mensuales históricas y generadas (modelo PAR(1)) en la cuenca del río Santa	97
31	Parámetros de las descargas media anuales generadas con el modelo AR(1). Estación Querococha	111
32	Parámetros de las descargas media anuales generadas con el modelo AR(1). Estación Olleros	112
33	Parámetros de las descargas media anuales generadas con el modelo AR(1). Estación Quillcay	113
34	Parámetros de las descargas media anuales generadas con el modelo AR(1). Estación Chancos	114
35	Parámetros de las descargas media anuales generadas con el modelo AR(1). Estación Llanganuco	115
36	Parámetros de las descargas media anuales generadas con el modelo AR(1). Estación Parón	116
37	Parámetros de las descargas media anuales generadas con el modelo AR(1). Estación Colcas	117

38	Parámetros de las descargas media anuales generadas con el modelo AR(1). Estación Los cedros	118
39	Parámetros de las descargas media anuales generadas con el modelo AR(1). Estación Quitaracsa	119

## ÍNDICE DE FIGURAS

N°		Pág.
1	Clasificación de los modelos hidrológicos	8
2	Correlograma del modelo ARMA (1,1) para diferentes valores de $\phi$ y $\theta$	20
3	Correlograma del modelo AR(1) y ARMA (1,1) para $\rho_1 = 0.4$ y diferentes valores $\phi$ y $\theta$	21
4	Procedimiento de estimación y validación del modelo según Box-Jenkins	22
5	Series de tiempo autocorrelacionadas	28
6	Salto en la media	31
7	Tendencia lineal en la media	32
8	Series hidrológicas anuales	32
9	Series hidrológicas mensuales	33
10	Mapa de ubicación de las 9 subcuencas en estudio (cuena del río Santa)	41
11	Diagrama de flujo para la modelación de las series hidrológicas	43
12	Series hidrológicas a extender	48
13	Caudales medios anuales de las estaciones de: Pachacoto, Querococha, Olleros, Quillcay y Chancos	58
14	Caudales medios anuales de las estaciones de: Llanganuco, Parón, Colcas, Los Cedros y Quitaracsa	58
15	Análisis doble masa de las estaciones Pachacoto, Querococha, Olleros, Quillcay y Chancos	59
16	Análisis doble masa de las estaciones Pachacoto, Olleros, Quillcay y Chancos y la estación modelo Querococha	59
17	Análisis doble masa de las estaciones Llanganuco, Parón, Colcas, Los Cedros y Quitaracsa	60
18	Análisis doble masa de las estaciones Parón, Colcas, Los Cedros y Quitaracsa y la estación modelo Llanganuco	60
19	Correlación de las descargas medias anuales, el área de la cuenca (A) y el porcentaje de glaciares (G)	68
20	Mapa de ubicación del parámetro $f_i$ ( $\phi_1$ ) de las 9 subcuencas en estudio	

	(cuenca del río Santa)	70
21	Correlación de la desviación estándar del error Se y el área de la cuenca (A).	71
22	Simulación de Monte Carlo de las descargas medias anuales generadas con el modelo ARMA (1,0) de la estación Querococha	106
23	Simulación de Monte Carlo de las descargas medias anuales generadas con el modelo ARMA (1,0) de la estación Olleros	106
24	Simulación de Monte Carlo de las descargas medias anuales generadas con el modelo ARMA (1,0) de la estación Quillcay	107
25	Simulación de Monte Carlo de las descargas medias anuales generadas con el modelo ARMA (1,0) de la estación Chancos	107
26	Simulación de Monte Carlo de las descargas medias anuales generadas con el modelo ARMA (1,0) de la estación Llanganuco.	108
27	Simulación de Monte Carlo de las descargas medias anuales generadas con el modelo ARMA (1,0) de la estación Parón	108
28	Simulación de Monte Carlo de las descargas medias anuales generadas con El modelo ARMA (1,0) de la estación Colcas	109
29	Simulación de Monte Carlo de las descargas medias anuales generadas con el modelo ARMA (1,0) de la estación Los Cedros	109
30	Simulación de Monte Carlo de las descargas medias anuales generadas con el modelo ARMA (1,0) de la estación Quitaracsa	110
31	Diagrama de caja de las descargas medias anuales, desviación estándar, coeficiente de sesgo y del parámetro ( $\phi_1$ ) de la estación Querococha	110
32	Diagrama de caja de las descargas medias anuales, desviación estándar, coeficiente de sesgo y del parámetro ( $\phi_1$ ) de la estación Olleros	111
33	Diagrama de caja de las descargas medias anuales, desviación estándar, coeficiente de sesgo y del parámetro ( $\phi_1$ ) de la estación Quillcay	111
34	Diagrama de caja de las descargas medias anuales, desviación estándar, coeficiente de sesgo y del parámetro ( $\phi_1$ ) de la estación Chancos	113
35	Diagrama de caja de las descargas medias anuales, desviación estándar, coeficiente de sesgo y del parámetro ( $\phi_1$ ) de la estación Llanganuco	114
36	Diagrama de caja de las descargas medias anuales, desviación estándar, coeficiente de sesgo y del parámetro ( $\phi_1$ ) de la estación Parón.	115
37	Diagrama de caja de las descargas medias anuales, desviación estándar,	

	coeficiente de sesgo y del parámetro ( $\phi_1$ ) de la estación Colcas.	116
38	Diagrama de caja de las descargas medias anuales, desviación estándar, coeficiente de sesgo y del parámetro ( $\phi_1$ ) de la estación Los cedros	117
39	Diagrama de caja de las descargas medias anuales, desviación estándar, coeficiente de sesgo y del parámetro ( $\phi_1$ ) de la estación Quitaracsa	118

## ÍNDICE DE ANEXOS

	<b>Pág.</b>
<b>ANEXO 1</b>	<b>127</b>
Datos de los caudales ( $m^3/s$ ) de los afluentes del río santa	127
1-1 Datos de Querococha	127
1-2 Datos de Olleros	128
1-3 Datos de Quillcay	129
1-4 Datos de Chancos	130
1-5 Datos de Llanganuco	131
1-6 Datos de Parón	132
1-7 Datos de Colcas	133
1-8 Datos de Los Cedros	134
1-9 Datos de Quitaracsa	135
<b>ANEXO 2</b>	<b>127</b>
Solución de las ecuaciones de Yule - Walker	136
<b>ANEXO 3</b>	<b>137</b>
Correlogramas de los datos observados	137
3-1 Correlogramas de la estación Querococha	138
3-2 Correlogramas de la estación Olleros	138
3-3 Correlograma de la estación Quillcay	139
3-4 Correlograma de la estación Chancos	139
3-5 Correlogramas de la estación Llanganuco	140
3-6 Correlogramas de la estación Parón	140
3-7 Correlogramas de la estación Colcas	141
3-8 Correlogramas de la estación Los Cedros	141
3-9 Correlogramas de la estación Quitaracsa	142
<b>ANEXO 4</b>	<b>143</b>
Parámetros de los modelos autorregresivos AR(p)	143
Modelos autorregresivos de orden 1 AR(1)	143

Modelos autorregresivos de orden 2. AR(2)	145
<b>ANEXO 5</b>	<b>148</b>
Parámetros de los modelos de medias móviles MA(q)	148
Modelos de medias móviles (MA)	148
Modelo de medias móviles de orden 1 MA(1)	148
Modelo de medias móviles de orden 2. MA(2)	149
<b>ANEXO 6</b>	<b>152</b>
Parámetros de los modelos autorregresivos y de media móvil ARMA(p,q)	152
Modelos mixtos autorregresivos y medias móviles ARMA (p, q)	152
Modelos ARMA (1,1)	152
<b>ANEXO 7</b>	<b>154</b>
Operador de retardos	154
<b>ANEXO 8</b>	<b>158</b>
Comparación gráfica de las series anuales históricas y generadas con el modelo AR(1) en los afluentes del río Santa	158
<b>ANEXO 9</b>	<b>161</b>
Validación estadística o contrastación estadística del modelo estocástico adecuado para los caudales medios mensuales de la cuenca del río Santa	161
<b>ANEXO 10</b>	<b>170</b>
Contraste de Dickey – Fuller	170

## I. INTRODUCCIÓN

Actualmente sabemos que el agua es un recurso finito, pues la oferta es limitada y demanda va en aumento en el tiempo; por esta razón para usar el agua racionalmente en las cuencas se debe estimar las ofertas y demandas de aguas utilizando teorías adecuadas que sean las más aproximadas a la realidad.

Bajo este principio, para estimar la oferta existen diferentes métodos: La hidrología estocástica es uno de estos métodos, que se ha aplicado en diferentes partes del Perú y del mundo con resultados satisfactorios. La modelación estocástica en la hidrología es una herramienta que evalúa el comportamiento espacial y temporal del agua utilizando los registros de caudales anuales, estacionales (mensuales) de varios años; por tanto el análisis de las series de tiempo hidrológico se realiza sobre base de los registros que ya han sucedido en el tiempo, y estas sirven para proyectar el comportamiento en el futuro.

En la actualidad, la gestión del recurso hídrico en el Perú exige la evaluación de la oferta hídrica de la cuenca colectora y de la demanda multisectorial del agua. La evaluación del recurso hídrico involucra el análisis e interpretación del comportamiento espacial y temporal de los componentes del ciclo hidrológico, especialmente de las descargas de las aguas superficiales.

Para pronosticar el comportamiento futuro de la oferta de agua es necesario conocer el comportamiento histórico cuantitativo de este recurso, para lo cual se necesita de datos históricos de aforo de varios años. En los diferentes puntos de la cuenca del río Santa se cuenta con datos de varios años, lo cual es una herramienta útil para formular modelos estocásticos que permitirán pronosticar la oferta de agua para varios años en cualquier punto de la cuenca del río Santa.

El primer aporte del presente trabajo consiste en que es una herramienta para estimar la oferta de agua en puntos no aforados de la cuenca, mediante modelos estocásticos regionales y estos caudales estimados servirán para realizar planificación hidrológica.

El segundo aporte consiste en que se puede estimar las descargas anuales o mensuales para periodos mayores a 25 años y con estos datos generados se puede determinar la oferta para diferentes niveles de persistencia y para diferentes usos.



El objetivo del presente trabajo es determinar modelos estocásticos que permitan generar descargas medias anuales o descargas medias mensuales en sitios no aforados en la cuenca del río Santa en la zona de la Cordillera Blanca, y estos servirán para una planificación hidrológica de la cuenca del río Santa.

En el capítulo I se indica los objetivos y la justificación de la tesis. En el capítulo II se describe los antecedentes relacionados con el modelamiento de las series de tiempo, donde se detalla las bases teóricas y conceptos relacionados con el modelamiento de las series hidrológicas.

En el capítulo III se desarrolla la metodología para la regionalización de las descargas medias anuales y mensuales. El modelamiento estocástico de las series hidrológicas se ha realizado en series consistentes completas, suficientes y confiables; mediante el análisis de consistencia se ha obtenido series hidrológicas libres de saltos y tendencias.

A las series libres de saltos y tendencias se les denomina series estacionarias y estas series se modelan mediante modelos ARMA (p, q) para el caso de caudales promedios anuales y mediante modelos PARMA (p, q) para el caso de descargas mensuales. El modelo adecuado ARMA(p,q) o PARMA (p,q) se define mediante la prueba estadística de SIC (criterio información de Schwarz modificado). Después de definir el modelo estocástico adecuado, se busca el modelo estocástico regional en función del área de la cuenca, del porcentaje del área glaciar y de los parámetros regionales  $\phi_1$  para el caso de descargas anuales y de  $\phi_{1,t}$  para el caso de descargas mensuales. La variable aleatoria  $\varepsilon_t$  y  $\varepsilon_{v,t}$  depende de la desviación estándar del error calculada con los modelos AR(1) o PAR (1) respectivamente. La desviación estándar del error se estima en función del área de la cuenca y porcentaje del área glaciar.

Para verificar si el modelo ARMA (p, q), PARMA (p, q), o el modelo regional es adecuado, se ha realizado la prueba de medias mediante T de student y la prueba de homogeneidad de variancias a través del estadístico F de Fiseher.

En el capítulo IV se presenta los resultados obtenidos aplicando la metodología descrita. Para el modelamiento estocástico se ha trabajado en 9 ríos de la cuenca del río Santa que son: río Yanayacu, río Negro, río Quillcay, río Marcará, río Llanganuco, río Parón, río Colas, río Los cedros y río Quitaracsa. Los ríos Pachacoto, Manta y Tablachaca no se han considerado en el modelamiento porque presentan datos sesgados.

En el capítulo V se presenta las conclusiones de la investigación. El modelo regional adecuado para las descargas medias anuales es el modelo estocástico autorregresivo de orden 1 AR(1) y, para las descargas mensuales el modelo estocástico adecuado es el modelo

autorregresivo periódico de orden 1 PAR (1,0). El modelo regional para estimar las descargas medias anuales está en función del área de la cuenca, porcentaje del área glaciar, y del parámetro modelo regional  $\phi_1$  y el modelo regional para estimar las descargas mensuales está en función del área de la cuenca, porcentaje del área glaciar y del parámetro regional mensual  $\phi_{1,t}$ . La variable aleatoria depende del área de la cuenca, del porcentaje del área glaciar y de la desviación estándar del error (ruido blanco).

En el capítulo VI se indica las recomendaciones para complementar la investigación.

En el capítulo VIII se presenta las referencias bibliográficas consultadas.

## **1.1 OBJETIVOS**

### **1.1.1 OBJETIVOS GENERALES**

- Evaluar modelos estocásticos con potencial de aplicación a las características particulares de los ríos de la cuenca del río Santa.

### **1.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Regionalizar los parámetros de los modelos estocásticos ARMA (p,q) para las descargas medias anuales.
- Regionalizar los parámetros de los modelos estocásticos PARMA (p,q) para las descargas medias mensuales.
- Determinar modelos estocásticos adecuados para las descargas medias anuales de los ríos de la cuenca del río Santa.
- Determinar modelos estocásticos adecuados para las descargas medias mensuales de los ríos de la cuenca del río Santa.
- Proponer una metodología para la aplicación de modelamiento estocástico de las descargas medias anuales y medias mensuales.

## **1.2 JUSTIFICACIÓN**

Estimar la oferta anual o mensual de agua, a través del tiempo en sitios no aforados en el ámbito de la Cordillera Blanca del río Santa, actualmente, no es posible porque no existen modelos estocásticos validados o contrastados con los datos observados. La mayoría

de los proyectos para captar el agua están ubicados en sitios alejados de las estaciones de aforo y, por lo tanto, es necesario determinar modelos adecuados de las series de tiempo.

Mediante el modelamiento estocástico utilizando datos de estaciones de aforo, se genera series sintéticas en sitios sin aforo, es decir, en cualquier punto de la cuenca, para lo cual se debe tener como dato el área de la cuenca, porcentaje del área glaciar y del parámetro regional  $\phi_1$ . Para generar descargas medias anuales y para generar descargas medias mensuales como dato de entrada se toma el área de la cuenca, porcentaje del área glaciar y el parámetro regional mensual  $\phi_{1,t}$ .

Para generar datos mediante los modelos estocásticos regionales AR(1) y PAR(1), es necesario estimar la componente aleatoria  $\varepsilon_t$  y  $\varepsilon_{v,t}$ . Estas variables aleatorias se han regionalizado y están en función de la desviación estándar del error (ruido blanco); la desviación estándar del error está en función del área de la cuenca y del porcentaje del área glaciar.

## II. REVISIÓN DE LITERATURA

### 2.1 ANTECEDENTES

García (2010) desarrolló un modelo para la generación sintética de series temporales de caudales anuales y caudales mensuales. El modelo desarrollado ha sido aplicado a los caudales mensuales y anuales para el río Grande (Santa Cruz-Bolivia). En este trabajo se ha logrado un buen ajuste entre los datos generados y observados. Para la generación de datos se ha utilizado los modelos autorregresivos de orden uno para ambos casos. El estudio lo ha realizado con datos de 17 años de registro (1975 a 1991). Ha realizado la prueba de series residuales y ha trabajado con series estacionarias.

Guevara et al (2010) realizaron el Análisis Estocástico de una Serie Cronológica de Caudales Mensuales del río Caroní en Venezuela. El estudio lo realizaron para la serie de tiempo de 1950 a 2003; en el modelamiento utilizó el método clásico de Box-Jenkins. Para eliminar la tendencia y periodicidad usaron la diferenciación estacional. Los modelos estocásticos evaluados son:  $SARIMA(1,0,0)(1,1,1)_{12}$ ,  $SARIMA(0,0,0)(0,1,1)_{12}$  y  $AR(1)$ . Mediante análisis de residuos llegaron a la conclusión de que el modelo  $SARIMA(1,0,0)(1,1,1)_{12}$  es el modelo adecuado para describir el comportamiento temporal del río Caroní.

Horque (2011) aplicó el modelamiento estocástico al dimensionamiento de las presas. La modelación estocástica lo ha realizado en la laguna La Victoria que es parte del Sistema Hidráulico de Afianzamiento de la Central Hidroeléctrica de Yaupi, localizada en la Región Central del Perú. Para el proceso de modelación ha utilizado un modelo autorregresivo, es decir modelos PAR. El modelamiento lo ha realizado siguiendo las etapas: i) el cálculo de los principales estadísticos de la muestra histórica en forma periódica; ii) la verificación de la independencia de la muestra histórica, mediante los correlogramas y los límites permisibles; iii) normalización; iv) la estandarización de las variables normales convirtiéndolas a distribución normal estándar; v) el cálculo de los parámetros del modelo  $PAR(1)$ , vi) el cálculo de la desviación estándar de los residuales. La selección del modelo adecuado se ha definido con el criterio de Akaike. El proceso de modelamiento ha sido aplicado a las precipitaciones registradas entre los años 1956 - 1995, mediante fórmulas

adecuadas se han transformado las precipitaciones en descargas.

Sánchez T, y Sánchez D (2009) en el estudio *Generación de Series Sintéticas Mensuales del Río Chira Mediante el Uso de Modelos Markovianos*, generaron series sintéticas de caudales medios mensuales del río Chira y luego determinaron la capacidad de embalse porque según estudios realizados, la represa Poechos tiene una vida útil de 20 años aproximadamente, como alternativa proponen el diseño de un embalse en la quebrada de San Francisco, ubicada en la cuenca del Río Chira. El estudio se ha realizado en las siguientes etapas: 1) Análisis de consistencia de la información de las series de descargas medias mensuales del Río Chira, sobre la base de las estaciones hidrométricas Ardilla y Ciruelo, ubicadas aguas arriba del embalse Poechos, como resultado encontraron que ambas series de tiempo han sido consistentes. 2) Modelamiento estocástico, mediante la utilización de los modelos markovianos. 3) Calibración y validación del modelo estocástico donde determinaron que el modelo markoviano de segundo orden AR (2), es apropiado para la estación Ardilla y el modelo markoviano de tercer orden AR (3), es adecuado para la estación Ciruelo. Para la calibración y validación han usado el programa de cómputo SAMS 2000 (Análisis Estocástico, Modelamiento y Simulación), versión 8.1. Basados en los modelos antes mencionados han generado 20 series sintéticas de 50 años cada una, para cada estación, con la ayuda del programa de cómputo SAMS 2000. Los datos de descargas medias mensuales utilizadas en la modelación son registros del año 1976 al año 2003. La bondad de ajuste del modelo se ha definido mediante la prueba de medias y la prueba de homogeneidad de variancias entre la serie observada y la serie generada.

Del Águila (2001) realizó una tesis consistente en el Modelamiento Estocástico de las Descargas Medias del río Santa – Ancash. El modelamiento lo realizó en la estación hidrográfica de Condorcerro, mediante el modelo autorregresivo de orden 1 AR (1), donde comparó los datos generados con los datos históricos y como resultado se obtuvo que el modelo adecuado para las descargas medias mensuales de la estación Condorcerro es el modelo AR (1). El estudio fue realizado para calcular la capacidad de almacenamiento del río Santa en la estación de Condorcerro.

## **2.2 MODELOS HIDROLÓGICOS**

Ven, et al (1993) indica que los modelos hidrológicos son simplificaciones de la realidad. Estos modelos se pueden clasificar en dos grupos: modelos físicos y modelos abstractos o matemáticos. Los modelos físicos pueden ser a escala o analógicos. Los modelos físicos representan al sistema o al prototipo en una escala reducida; como ejemplo de

modelos físicos a escala se tiene a los modelos hidráulicos del Laboratorio Nacional de Hidráulica del Ministerio de Agricultura y Riego ubicado en la Universidad Nacional de Ingeniería. Los modelos analógicos usan otro sistema físico con propiedades similares a los del prototipo. Como ejemplo de modelos analógicos se tiene el montaje de determinados circuitos eléctricos que pueden simular a los acuíferos, dado que el modelo eléctrico se rige por la diferencia de potencial y el sistema de aguas subterráneas, de forma similar también se rigen por la diferencia de potencial hidráulico.

Los modelos matemáticos o abstractos son ecuaciones matemáticas que representan al sistema hidrológico. Los modelos hidrológicos matemáticos son funciones de tres variables (aleatoriedad, espacio y tiempo). En base a la aleatoriedad o no, pueden clasificarse en: determinísticos y estocásticos. En la figura 1 se observa la clasificación de los modelos hidrológicos.

### **2.2.1 MODELO DETERMINÍSTICO**

Son modelos que no consideran la aleatoriedad. Los modelos determinísticos pueden clasificarse en modelos determinísticos agregados y en modelos determinísticos distribuidos.

García (2010), indica que en hidrología determinística la variable temporal se asume que está explicada totalmente por otras variables que se desarrollan siguiendo un método adecuado, basado generalmente en leyes físicas de la naturaleza.

#### **a. Modelos agregados**

Son considerados como modelos globales donde a la cuenca se trata considera como una sola entidad con una única entrada de lluvia (promedio), donde el caudal de salida se reproduce a partir de una dinámica global del sistema. Estos modelos no consideran la variación espacial de la variable, pero sí tienen en cuenta la variación temporal de la variable y por lo tanto, existen modelos agregados de flujo permanente y flujo no permanente. Como ejemplo se tiene la ecuación de Manning, que es un modelo que describe el comportamiento del flujo permanente subcrítico. Otro ejemplo se tiene en el modelo de Muskingum, que describe el comportamiento de flujo no permanente denominado como tránsito de avenidas en ríos.

#### **b. Modelos distribuidos**

Los modelos distribuidos consideran la variación espacial de la variable. Pueden considerarse como el caso de flujo permanente y flujo no permanente (según la variación en el tiempo).

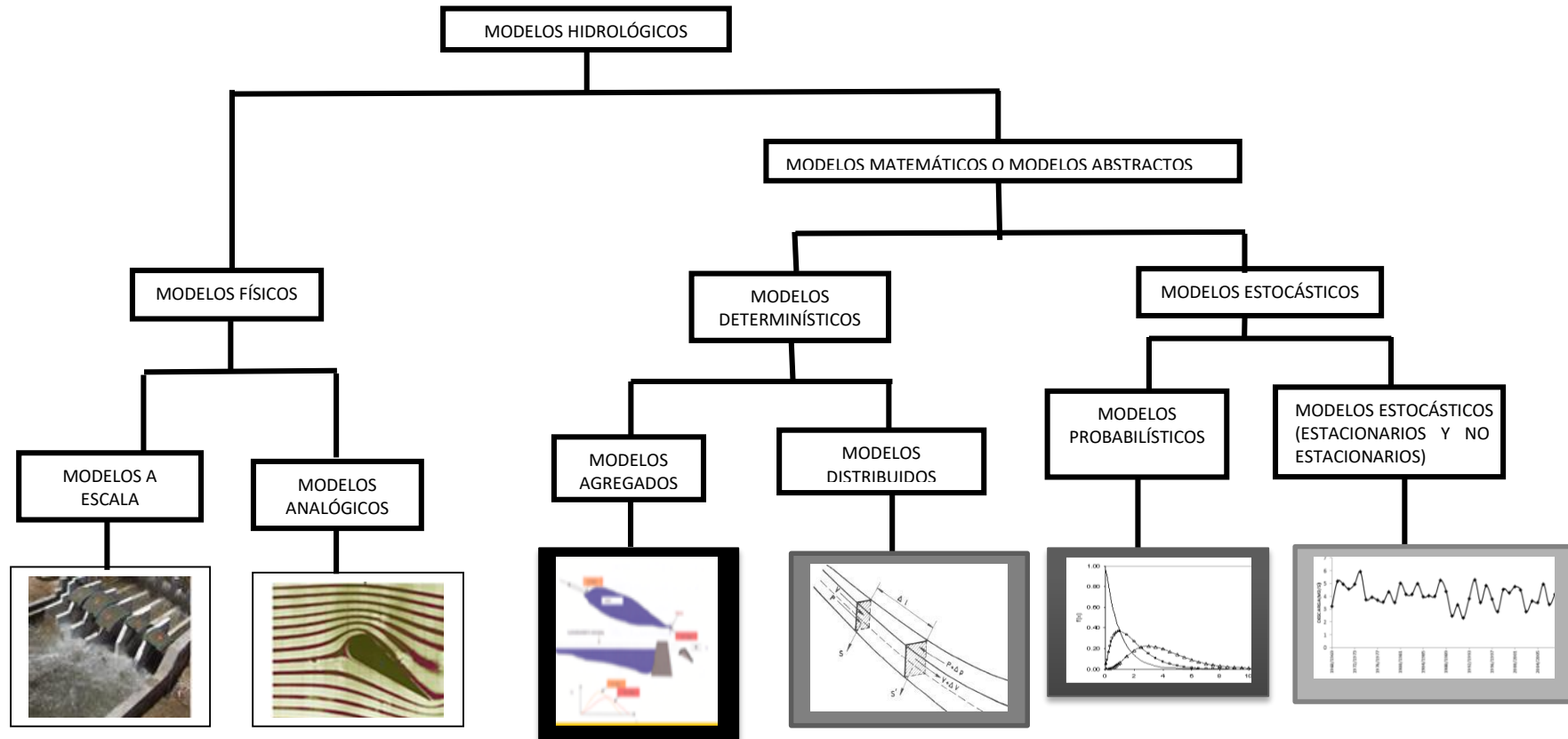


Figura 1: Clasificación de los modelos hidrológicos

Fuente: Adaptado de Ven, et al (1993).

La ecuación de Saint Venant es un ejemplo de estos modelos, que describe el comportamiento de flujo no permanente y variado.

### **2.2.2 MODELO ESTOCÁSTICO**

Custodio y Llamas (2001), indican que los modelos estocásticos son adecuados para describir las series cronológicas o series de tiempo hidrológico. Las series cronológicas se dividen en dos categorías: determinísticas y estocásticas. Las series determinísticas son aquellas cuyo valor en cualquier instante se puede determinar con certeza y estas series pueden ser periódicas, semiperiódicas, o presentar tendencias o saltos. Las series estocásticas son aquellas series cuyos valores en cualquier instante se pueden definir por una función de distribución, es decir, en términos de probabilidad; las series estocásticas pueden ser estacionarias o no según sus parámetros (media, varianza, etc.) sean independientes o no a través del tiempo.

García (2010), indica que el sentido de la palabra estocástica, puede dar a entender que se trata de un proceso puramente aleatorio; en hidrología, este no es el caso, ya que puede decirse que los procesos relacionados a las series temporales que se desarrollan con esta técnica son parcialmente aleatorios; esto es, relacionan una parte determinística y otra probabilística. En hidrología probabilística, el interés está centrado en la probabilidad que de un evento sea igualado o excedido, es decir, que está basado en la ley de las probabilidades. En la hidrología estocástica el interés está centrado en la secuencia temporal de los eventos (precipitaciones, caudales, etc.), la secuencia temporal es todo lo que interesa. La representación estocástica preserva las propiedades de ocurrencia asociada con la secuencia de los eventos.

Existen dos tipos de modelos estocásticos de las series de tiempo hidrológico, modelos que son independientes en el tiempo, como los modelos estadísticos y los modelos probabilísticos y los modelos que consideran la dependencia (correlación) en el tiempo, como es el caso de los modelos estocásticos propiamente dichos (hidrología estocástica).

### **2.3 PROCESOS ESTOCÁSTICOS**

Gujarati y Porter (2010), indican que un proceso estocástico o aleatorio es una colección y sucesión de variables aleatorias ordenadas en el tiempo. Un proceso estocástico se puede caracterizarlo bien por su función de distribución o por sus momentos.

Como suele ser muy complejo determinar las características de un proceso estocástico a través de su función de distribución se suele recurrir a caracterizar a través de los dos



primeros momentos, el primer momento es la esperanza (media) y el segundo momento son las variancias y las covarianzas. (Gonzales, 2009).

Villavicencio (2016), indica que desde un punto de vista intuitivo, un proceso estocástico se describe como una secuencia de datos que evolucionan (suceden) en el tiempo.

### **2.3.1 SERIES DE TIEMPO O SERIES CRONOLÓGICAS**

Villavicencio (2016), indica que a las series temporales se define como un caso particular de los procesos estocásticos.

Es una realización del proceso estocástico, es decir, es una observación (muestra) de  $n$  variables aleatorias ordenadas en el tiempo. Una serie temporal o cronológica es una secuencia de datos, observaciones o valores medidos en determinados momentos del tiempo, ordenados cronológicamente. Estas observaciones de una variable o de un mismo fenómeno en distintos instantes de tiempo constituyen una serie temporal como son: las descargas medias diarias de un río, los registros de precipitación pluvial diaria, las mediciones de la temperatura del aire. etc.

Pindyck y Rubinfeld (2001), indican que cada valor de  $y_1, y_2, \dots, y_t$  en la serie es extraído al azar de una distribución de probabilidad. Al modelar dicho proceso, se intenta describir las características de su aleatoriedad, esto ayudaría a inferir algo sobre las probabilidades asociadas con los valores futuros alternativos de la serie. Para generalizar se puede decir que la serie observada  $y_1, \dots, y_t$  es extraída de un conjunto de variables aleatorias distribuidas en forma conjunta. Si de alguna manera se pudiera especificar la función de distribución de probabilidad de la serie, entonces se podría determinar la probabilidad del resultado futuro. Sin embargo, la especificación completa de la función de la distribución de probabilidad para la serie de tiempo por lo general es imposible. Por lo tanto, es usual construir un modelo simplificado de las series de tiempo que explica su aleatoriedad de manera que sea útil para pronosticar los valores futuros que son los modelos estocásticos (modelos autorregresivos, modelos de promedio móvil, etc).

#### **a. Análisis de las series temporales**

Hernández (2009), indica que históricamente tres son los tipos de análisis o procedimientos metodológicos para la evaluación o estudio de series temporales como son: los métodos de descomposición, método de análisis causal y el método de Box-Jenkins.

- **Método de descomposición.** Denominado también el método clásico de series temporales. Este método consiste en dividir la serie temporal en sus

componentes como son: tendencia, ciclo, componente estacional y componente irregular (aleatorio).

- **Método de análisis causal.** Llamado también método de enfoque estructural. Este método trata de explicar la evolución de la serie temporal mediante una ecuación que relaciona la variable en estudio con otras variables que inciden sobre ella.

- **Método de Box-Jenkins.** Hernández (2009), indica que este método fue propuesto por Box y Jenkins en el año 1970. Es el análisis moderno de las series temporales. Este método explica la evolución de la serie temporal (variable temporal) en función del comportamiento en el pasado de la misma serie temporal. Conocida la estructura de dependencia entre valores sucesivos de la serie mediante modelos integrados autorregresivos de medias móviles (ARIMA) es posible predecir la evolución futura de la serie temporal a través de su pasado.

### 2.3.2 SERIES DE TIEMPO ESTACIONARIO

Gujarati y Porter (2010), indican que un proceso estocástico es estacionario si su media y su varianza son constantes en el tiempo y si el valor de la covarianza entre dos periodos depende sólo de la distancia o rezago entre estos dos periodos y no del tiempo en el cual se calculó la covarianza. La esencia básica para el análisis estocástico es que el proceso sea estacionario, es decir, que las propiedades estadísticas del proceso no varían en el tiempo. Así, las propiedades de los registros históricos se pueden utilizar para derivar series sintéticas largas. Esta propiedad estacionaria se refleja gráficamente en que los valores de la serie tienden a oscilar alrededor de una media constante y la variabilidad con respecto a esa media también permanece constante en el tiempo.

Una serie temporal es estacionaria si:

$$E[X_t] = \mu \text{ para todo } t \quad (1)$$

$$VAR[X_t] = \sigma^2 \text{ para todo } t \quad (2)$$

$$COV[X_t, X_{t,k}] = \gamma_k \text{ para todo } t \text{ y } k \quad (3)$$

Las ecuaciones (1) y (2) significan que el valor esperado y la varianza de las variables aleatorias del proceso son independientes del tiempo. La ecuación (3) significa que la covarianza entre dos variables aleatorias depende solamente del retardo (desfase) del tiempo (k) entre dos variables aleatorias y no del tiempo en sí mismo. Por tanto, se dice que una serie

de tiempo es estacionaria cuando el valor de su media, varianza y covarianza no varían sistemáticamente en el tiempo.

#### **a. Prueba de estacionaridad**

Gujarati y Porter (2010), indican que hay varias pruebas para probar la estacionaridad y describen dos: el análisis gráfico y la prueba del correlograma.

Peña (2010) indica que, si se desea decidir si un proceso es no estacionario se puede realizar un contraste de raíces unitarias.

Las representaciones gráficas como los correlogramas son pruebas visuales o suplementarias o subjetivas, mientras que la prueba de raíces unitarias son pruebas estadísticas y objetivas.

#### **i. Análisis gráfico**

Consiste en dibujar la serie histórica y considerar las medidas descriptivas básicas, donde se puede apreciar si los datos se presentan en forma creciente (tendencia), si existe influencia de ciertos periodos de cualquier unidad de tiempo (estacionalidad), si aparecen outliers (observaciones extrañas o discordantes). Sí la serie es estacionaria no deben existir tendencias, estacionalidades, etc.

#### **ii. Prueba del correlograma**

Es la representación gráfica de los coeficientes de autocorrelación  $r_k$  para los diferentes desfases o retardos  $k$ ; se grafica los diferentes valores de  $r_k$  en el eje de la ordenada y el valor de  $k$  en el eje de la abscisa. Se calcula la función de autorrelación simple y la función autocorrelación parcial.

Vásquez, et al (2011), indican que para ver si la serie es o no estacionaria se observa el correlograma. Si este decrece lentamente, es porque no hay estacionaridad (cuando el decrecimiento es rápido la serie es estacionaria). Las correlaciones se pueden expresar en función de la covarianza.

#### **ii.1 Covariancia**

La covarianza de una serie de tiempo o la autocovarianza se estima con la ecuación (4).

$$\hat{\gamma}_k = \frac{\sum(x_t - \bar{X})(x_{t+k} - \bar{X})}{n} \quad (4)$$

Para una muestra el estimador no sesgado es igual a:

$$\hat{\gamma}_k = \frac{\sum(x_t - \bar{X})(x_{t+k} - \bar{X})}{n-1} \quad (5)$$

Si el proceso es estacionario, la covarianza es constante a lo largo del tiempo, como se indica en la ecuación (3)

## ii.2 Autocorrelación

La autocorrelación es la correlación entre las mismas variables de la serie de tiempo, donde se correlacionan los valores de la variable Y en un cierto tiempo con los valores correspondientes de Y en tiempos anteriores. La expresión matemática del coeficiente de autocorrelación es:

$$\rho_k = \frac{E[(y_t - \mu_t)(y_{t+k} - \mu_t)]}{\sqrt{E[(y_t - \mu_t)^2]E[(y_{t+k} - \mu_t)^2]}} = \frac{Cov(y_t, y_{t+k})}{\sigma_{y_t} \sigma_{y_{t+k}}} \quad (6)$$

Como se ha definido anteriormente para un proceso estacionario la varianza en el tiempo t es decir el denominador de la ecuación (6) es la misma para el tiempo t+k, bajo esta consideración en un proceso estocástico estacionario el coeficiente de autocorrelación se estima con la ecuación (7).

$$\rho_k = \frac{E[(y_t - \mu_t)(y_{t+k} - \mu_t)]}{\sigma_y^2} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\text{covarianza en el rezago } k}{\text{varianza}} \quad (7)$$

Si k=0 en la ecuación (7) se tiene:

$$\rho_0 = \frac{E[(y_t - \mu_t)(y_t - \mu_t)]}{\sigma_y^2} = \frac{E[(y_t - \mu_t)^2]}{\sigma_y^2} = 1 \quad (8)$$

Gujarati y Poter (2010), indican que la varianza y la covarianza se miden en las mismas unidades; por tanto  $\rho_k$  es un número sin unidad de medida, es decir, es adimensional.

Como en la práctica se tiene sólo una realización de un proceso estocástico (muestra), se puede calcular el valor de autocorrelación muestral  $\hat{\rho}_k$  dada por la ecuación 9.

$$\hat{\rho}_k = r_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0} = \frac{\frac{\sum(y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{n}}{\frac{\sum(y_t - \bar{y})^2}{n}} = \frac{\text{covarianza en el rezago } k}{\text{varianza}} \quad (9)$$

Donde:

$\hat{\rho}_k$  = autocorrelación muestral

$\hat{\gamma}_k$  = autocovarianza muestral o covarianza muestral

$\hat{\gamma}_0$  = varianza muestral

### ii.3 Función de autocorrelación (FAC)

Las funciones de autocorrelación miden la relación lineal entre variables aleatorias de procesos separados a cierta distancia (retardo) en el tiempo. La estimación de las funciones de autocorrelación permite determinar la forma de procesos estocásticos. La función de autocorrelación para una serie de tiempo es definida mediante la ecuación (9).

La función de autocorrelación para series estacionarias disminuye a medida que aumenta el retardo  $k$ , es decir, la función de autocorrelación de un proceso estocástico estacionario tiende a cero rápidamente cuando  $k$  tiende al  $\infty$ .

La autocorrelación es una función simétrica, es decir se cumple:

$$\gamma_k = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+k} - \mu)] = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-k} - \mu)] = \gamma_{-k} \quad (10)$$

$$\hat{\rho}_k = r_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0} = \frac{\hat{\gamma}_{-k}}{\hat{\gamma}_0} = \hat{\rho}_{-k} \quad (11)$$

Por esta razón en el correlograma se acostumbra representar la función de autocorrelación sólo para los valores positivos del retardo  $k$ .

### ii.4 Función de autocorrelación parcial (FACP)

Relacionada con la función de autocorrelación existe la función de autocorrelación parcial, que es el coeficiente de autocorrelación parcial de orden  $k$ . El coeficiente de autocorrelación parcial es la autocorrelación entre parejas de valores separados en esa distancia pero eliminando el efecto debido a la autocorrelación producida por retardos anteriores a  $k$ . Es decir la función de autocorrelación parcial es la relación lineal donde se ha eliminado la correlación que estas variables tienen con otras variables. Los valores de las autocorrelaciones parciales  $(\phi_1, \phi_2, \dots)$ , se hallan solucionando las ecuaciones de Yule-Walker.

### iii. Prueba de raíces unitarias

Peña (2010) dice que estas pruebas indican si debemos o no tomar una diferencia adicional en una serie para convertirla en estacionaria.

$H_0: \beta = 0$  es un proceso no estacionario donde  $\rho = 1$ ,

$H_1: \beta \neq 0$ , significa que el proceso es estacionario

La decisión del contraste es:

Sí:  $t_\mu \leq tc$  (para un nivel probabilístico de la prueba) se rechaza la hipótesis nula, es decir hay estacionaridad; por tanto la serie de tiempo es estacionario o es estable.

Sí:  $t_\mu > tc$  (para un nivel probabilístico de la prueba) indica aceptar la hipótesis nula, es decir que no existe estacionaridad, por tanto la serie de tiempo es no estacionaria o es

inestable. El valor de  $t_c$  se obtiene de la tabla.  $t_\mu$  se calcula con la ecuación (10.8) del anexo 10.

### 2.3.3 PROCESO DE RUIDO BLANCO

Villavicencio (2016) indica que un ruido blanco es un caso simple de los procesos estocásticos, donde los valores son independientes e idénticamente distribuidos a lo largo del tiempo con media cero e igual varianza; se denota por  $\varepsilon_t$ .

Es un proceso con media 0, varianza constante, y sin autocorrelación. No se puede predecir a partir de su pasado. Es una sucesión de variables aleatorias con esperanza 0. Cada término de variable aleatoria  $\varepsilon_t$  es una variable aleatoria de distribución normal con media cero  $E(\varepsilon_t) = 0$ , varianza  $E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2$  y covarianza  $\gamma_k = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}) = 0$ , para  $k \neq 0$ .

Peña (2010) indica que el proceso de ruido blanco es un proceso estacionario, que cumple tres condiciones: la primera condición establece que esperanza es siempre constante e igual a cero, la condición segunda establece que la varianza es constante y la tercera condición establece que las variables del proceso están incorreladas para todos los retardos. González (2009) indica, que el proceso ruido blanco es muy útil en el análisis de series temporales porque es la base para la construcción de los modelos ARIMA(p; d; q).

### 2.3.4 MODELOS DE LAS SERIES DE TIEMPO

Vásquez, et al (2011), indican que existen varios modelos para las series de tiempo, los que se muestran en cuadro 1.

Cuadro 1: Modelos para las series de tiempo

MÉTODO DE PROYECCIÓN	CANTIDAD DE DATOS HISTÓRICOS	PATRON DE LOS DATOS	HORIZONTE DE PROYECCION	TIEMPO DE PREPARACION
AJUSTE EXPONENCIAL SIMPLE	5 A 10 OBSERVACIONES PARA FIJAR LA PONDERACIÓN	LOS DATOS DEBEN SER ESTACIONARIOS	CORTO	CORTO
AJUSTE EXPONENCIAL DE HOLT	10 A 15 OBSERVACIONES PARA FIJAR LA PONDERACIÓN	TENDENCIAS PERO NO ESTACIONALIDAD	CORTO A MEDIANO	CORTO
AJUSTE EXPONENCIAL DE WINTER	POR LO MENOS 4 O 5 OBSERVACIONES POR TRIMESTRE	TENDENCIAS Y ESTACIONALIDAD	CORTO A MEDIANO	CORTO
MODELOS DE LA TENDENCIA DE LA REGRESIÓN	10 A 20 OBSERVACIONES PARA LA ESTACIONALIDAD	TENDENCIAS Y ESTACIONALIDAD	CORTO A MEDIANO	CORTO
MODELOS DE REGRESIÓN CAUSAL	10 OBSERVACIONES POR VARIABLE INDEPENDIENTE	PUEDE MANEJAR PATRONES COMPLEJOS	CORTO, MEDIANO O LARGO	LARGO TIEMPO PARA EL DESARROLLO, CORTO PARA LA PUESTA EN EJECUCIÓN
DESCOMPOSICIÓN DE LAS SERIES DE TIEMPO	SUFICIENTE PARA VER 2 PICOS Y SIMAS	MANEJAR PATRONES CÍCLICOS Y ESTACIONALES, PUEDE IDENTIFICAR LOS PUNTOS CRÍTICOS	CORTO A MEDIANO	CORTO TIEMPO PARA LA MODELACIÓN
BOX-JENKINS	50 A MAS OBSERVACIONES	DEBE SER ESTACIONARIOS O TRANSFORMADOS A ESTACIONARIOS	CORTO, MEDIANO O LARGO	LARGO

FUENTE : Vásquez, et al (2011)

**a. Modelos lineales de las series de tiempo**

Novales (1993), indica que Box y Jenkins en el año 1970 propusieron una metodología rigurosa para la identificación, estimación y diagnóstico de modelos dinámicos para datos de series temporales que justificadamente se han convertido en una herramienta habitual en el análisis de series económicas.

Pindyck y Rubinfeld (2001), indican que los modelos lineales de las series de tiempo explican el movimiento de una serie de tiempo relacionándola con sus propios valores pasados y con una suma ponderada de perturbaciones aleatorias actuales y rezagadas. Los modelos adecuados para el estudio de series temporales son los modelos lineales como: modelos autorregresivos (AR), modelos de media móvil (MA) y los modelos autorregresivos y de media móvil (ARMA).

**i. Modelos autorregresivos (AR)**

Pindyck y Rubinfeld (2001), indican que en un proceso autorregresivo de orden  $p$  la observación actual  $y_t$  es generada por un promedio ponderado de observaciones pasadas que se remontan (rezagos) a  $p$  periodos junto con la perturbación aleatoria en el periodo actual.

Este modelo es denominado como AR( $p$ ) que es el modelo autorregresivo de orden  $p$  y la representación matemática viene dada por la ecuación (12).

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \delta + \varepsilon_t \tag{12}$$

Donde:

$\delta$  = término constante que se relaciona con la media del proceso estocástico.

$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$  = parámetros del modelo (son estimados)

$\varepsilon_t$  = variable aleatoria que está distribuida en forma independiente a lo largo del tiempo, son variables generadas por un proceso de ruido blanco

$p$  = orden del modelo (número de rezagos o retardos)

Otra forma de representar el modelo autorregresivo AR en función de sus desviaciones está dada por la ecuación (13).

$$y_t = \mu + \sum_{j=1}^p \phi_j (y_{t-j} - \mu) + \varepsilon_t \tag{13}$$

Cada término de variable aleatoria  $\varepsilon_t$  es una variable aleatoria de distribución normal con media cero  $E(\varepsilon_t)=0$  y varianza  $E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2$ , y covarianza  $\gamma_k = E[\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}] = 0$ , para  $k \neq 0$ .

Si el proceso autorregresivo es estacionario, entonces su media  $\mu$  debe ser invariable con respecto al tiempo, es decir se cumple que  $E(y_t) = E(y_{t-1}) = E(y_{t-2}) = \dots = \mu$ .

Remplazando esta condición en la ecuación (12) se obtiene la media del modelo autorregresivo dada por:

$$\mu = \phi_1\mu + \phi_2\mu + \dots + \phi_p\mu + \delta + 0 \quad (14)$$

$$\mu = \frac{\delta}{1-\phi_1-\phi_2-\dots-\phi_p} \quad (15)$$

**El modelo autorregresivo de orden 1, AR (1)** está dado por la ecuación (16).

$$y_t = \mu + \phi_1(y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t \quad (16)$$

Maidment (1993) indica que el modelo autorregresivo de orden bajo dado por la ecuación (16) es adecuado para modelar series hidrológicas anuales y para series diarias y estacionales después de la estandarización (normalización).

La varianza está dada por:

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi_1^2} \quad (17)$$

El coeficiente de autocorrelación se obtiene con la ecuación (18):

$$\gamma_1 = \phi_1 \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi_1^2} = \phi_1\gamma_0 \Rightarrow \rho_1 = \phi_1 \quad (18)$$

La demostración de las ecuaciones (17) y (18) se presenta en el anexo 4.

**El modelo autorregresivo de orden 2 AR (2)** está dado por la ecuación (19).

$$y_t = \mu + \phi_1(y_{t-1} - \mu) + \phi_2(y_{t-2} - \mu) + \varepsilon_t \quad (19)$$

Los parámetros  $\phi_1$  y  $\phi_2$  se estiman solucionando las ecuaciones de Yule-Walker.

La solución de la ecuación de Yule-Walker es:

$$\begin{aligned} \phi_1\rho_0 + \phi_2\rho_1 &= \rho_1 \\ \phi_1\rho_1 + \phi_2\rho_0 &= \rho_2 \end{aligned} \quad (20)$$

Las ecuaciones de Yule – Walker se muestran en el anexo 2.

Los parámetros  $\phi_1$  y  $\phi_2$  también se pueden estimar con las ecuaciones (21) y (22).

$$\rho_1 = \frac{\phi_1\gamma_0}{\gamma_0} = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} \quad (21)$$

$$\rho_2 = \frac{\phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_0}{\gamma_0} = \frac{\phi_1\frac{\phi_1\gamma_0}{1-\phi_2} + \phi_2\gamma_0}{\gamma_0} = \phi_2 + \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} \quad (22)$$

La demostración de las ecuaciones (21) y (22) se muestran en el anexo 4.

**Modelo autorregresivo de orden p AR (p);** la media está dada por la ecuación (15), la varianza y el coeficiente de autocorrelación están dados por las ecuaciones (23) y (24).



$$\gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \sum_{j=1}^p \phi_j \rho_j} \quad (23)$$

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \quad (24)$$

La demostración de las ecuaciones (23) y (24) se muestra en el anexo 4.

## ii. Modelos de medias móviles (MA)

Pindyck y Rubinfeld (2001), indican que en el proceso de media móvil de orden q cada observación  $Y_t$  es generada por un promedio ponderado de perturbaciones aleatorias que se remontan a q periodos. Este modelo se denota por MA(q) y la ecuación que describe es:

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (25)$$

Donde:

$\theta_1, \dots, \theta_q$  = parámetros del modelo, que pueden ser positivos o negativos.

$\varepsilon_t, \dots, \varepsilon_{t-q}$  = variables aleatorias que están distribuidas en forma independiente a lo largo del tiempo, son variables generadas por un proceso de ruido blanco.

$\mu$  = media

q = orden del modelo

Como el proceso es estacionario la media, varianza y la covarianza están dadas por las ecuaciones (1), (2) y (3).

**Modelo de media móvil de orden 1 MA (1)** está dado por la ecuación (26).

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad (26)$$

El parámetro  $\theta_1$  se estima con la ecuación (27).

$$\hat{\theta}_1 = -\frac{1}{\hat{\theta}_1} - \frac{1}{r_1} \quad (27)$$

La ecuación (27) se demuestra en el anexo 5.

**El modelo de media móvil de orden 2, MA (2)** está dado por la ecuación (28).

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} \quad (28)$$

Los parámetros  $\theta_1$  y  $\theta_2$  se estiman con las ecuaciones (29) y (30).

$$r_1 - 2 \left( r_1 - \frac{r_1}{r_2} \right) \hat{\theta}_2 + \left[ 2r_1 + r_1 \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 - 2 \left( \frac{r_1}{r_2} \right) \right] \hat{\theta}_2^2 + \left( -2r_1 + \frac{r_1}{r_2} \right) \hat{\theta}_2^3 + r_1 \hat{\theta}_2^4 = 0 \quad (29)$$

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\frac{r_1 \hat{\theta}_2}{r_2}}{1 - \hat{\theta}_2} \quad (30)$$

La demostración de las ecuaciones (29) y (30) se muestra en el anexo 5.

**Modelo de media móvil de orden q, MA (q).** La varianza y el coeficiente de autocorrelación están dados por las ecuaciones (31) y (32).

$$\gamma_0 = s^2 = \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2 \sigma_\varepsilon^2 + \dots + \theta_q^2 \sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 \dots + \theta_q^2) \quad (31)$$

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2} & \text{para } k = 1, \dots, q \\ 0 & k > 0 \end{cases} \quad (32)$$

La demostración de las ecuaciones (31) y (32) se muestran en el anexo 5.

La variable  $\varepsilon_t$  es una variable aleatoria de distribución normal con media cero  $E(\varepsilon_t)=0$  y varianza  $E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2$ , y covarianza  $\gamma_k = E[\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}] = 0$ , para  $k \neq 0$ .

### iii. Modelos mixtos autorregresivos y medias móviles ARMA (p, q)

Pindyck y Rubinfeld (2001), indican que muchos procesos aleatorios estacionarios no pueden modelarse como medias móviles, puros o como autorregresivos puros, dado que tienen las características de ambos tipos de procesos estocásticos; por tanto, estos procesos se pueden modelar a través del modelo denominado autorregresivo y media móvil de orden (p, q) a los que también se les conoce con el nombre modelo ARMA(p, q). Los modelos ARMA(p, q) se representa mediante la ecuación (33).

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \delta + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (33)$$

Donde:

$\phi, \theta, \varepsilon_t, p$  y  $q$  ya han sido definidos en las ecuaciones (12) y (25)

Si el proceso es estacionario, la media es constante a lo largo del tiempo.

Maidment (1993) indica que el modelo más versátil que el modelo AR es el autorregresivo y de media móvil (ARMA). La expresión matemática de este modelo es:

$$y_t = \mu + \sum_{j=1}^p \phi_j (y_{t-j} - \mu) + \varepsilon_t - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} \quad (34)$$

Donde:

$\phi_1, \dots, \phi_p$  son los parámetros del modelo autorregresivo de orden p,

$\theta_1, \dots, \theta_q$  son los parámetros del modelo de media móvil de orden q

$\varepsilon_t$  = variable aleatoria que está distribuida en forma independiente. Es una variable normal no correlacionada con media cero y variancia  $\sigma_\varepsilon^2$ .

El modelo puede ser denotado por ARMA(p, q). El modelo ARMA(p, 0) es un modelo autorregresivo de orden p representado por AR(p). El modelo ARMA(0, q) es un modelo de media móvil de orden q representado por MA(q).

La varianza y el coeficiente de autocorrelación del modelo ARMA(1,1) es:

$$\sigma^2 = \gamma_0 = s^2 = \frac{(1-2\phi_1\theta_1+\theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi_1^2} \quad (35)$$

$$\rho_1 = \frac{(1-\phi_1\theta_1)[\phi_1-\theta_1]}{1-2\phi_1\theta_1+\theta_1^2} = r_1 \quad (36)$$

Las ecuación (35) y (36) se demuestra en el anexo 6.

La función de autocorrelación simple está dada por la ecuación (37).

$$\rho_k = \frac{\phi_1\gamma_{k-1}}{\gamma_0} = \phi_1\rho_{k-1} = \rho_1\phi_1^{k-1} \quad \text{para } k \geq 2 \quad (37)$$

Por tanto:

$$\phi_1 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \Rightarrow \hat{\phi}_1 = \frac{r_2}{r_1} \quad (38)$$

Resolviendo la ecuación (36) se tiene:

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\phi}_1 + \frac{1-\hat{\phi}_1r_1}{\hat{\phi}_1-r_1} - \frac{1}{\hat{\theta}_1} \quad (39)$$

La demostración de esta ecuación se muestra en el anexo 6.

El estadístico  $\hat{\theta}_1$  también se puede estimar mediante la siguiente ecuación:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4(r_1 - \hat{\phi}_1)^2}}{2(r_1 - \hat{\phi}_1)} \quad (40)$$

$$b = 1 - 2\phi_1r_1 + \phi_1^2$$

De la ecuación (35) se obtiene:

$$\sigma_\varepsilon^2 = s^2 \frac{\hat{\phi}_1 - r_1}{\hat{\theta}_1} \quad (41)$$

La demostración de esta ecuación se muestra en el anexo 6.

La ecuación del modelo ARMA(1,1) es:

$$y_t = \mu + \phi_1(y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} \quad (42)$$

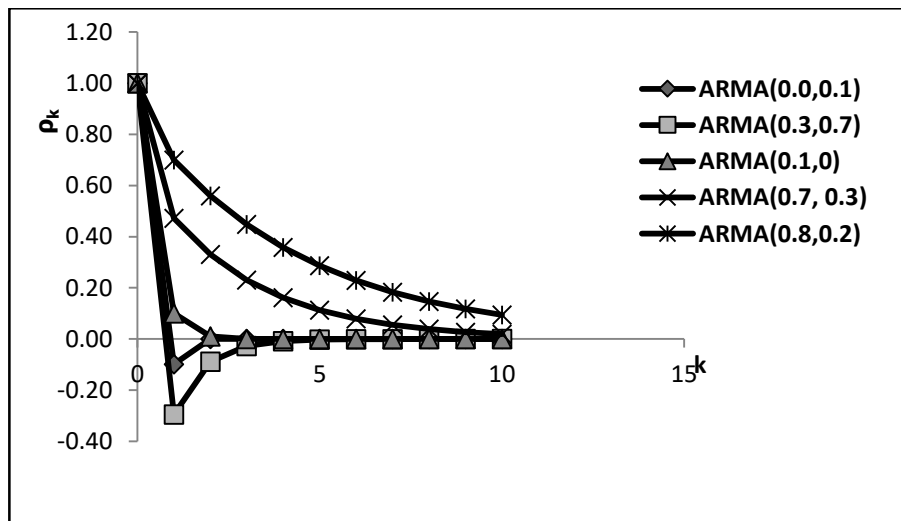


Figura 2: Correlograma del modelo ARMA (1,1) para diferentes valores de  $\phi$  y  $\theta$   
Fuente: Maidmend 1993

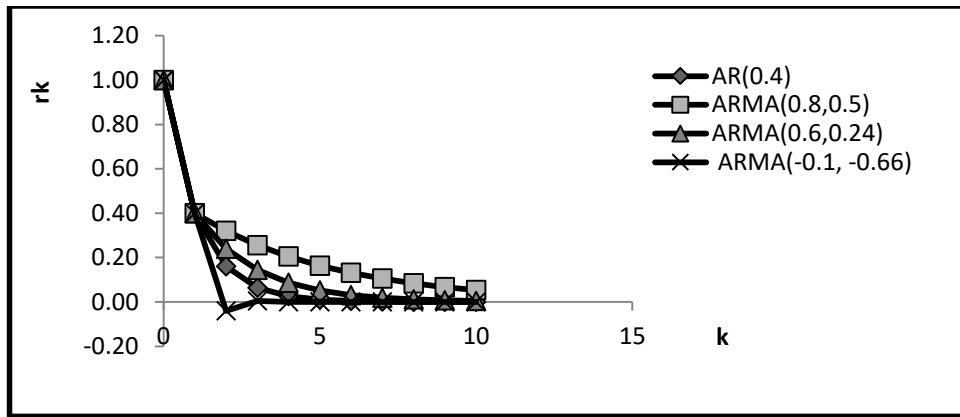


Figura 3: Correlograma del modelo AR(1) y ARMA(1,1) para  $\rho_1 = 0.4$  y diferentes valores de  $\phi$  y  $\theta$

Fuente: Maidmend 1993

En las figuras 2 y 3 se muestran los correlogramas indicados por Maidmend 1993. En la figura 2 se muestran los correlogramas para el modelo autorregresivo y de media móvil ARMA(1,1) para diferentes parámetros  $\phi$  y  $\theta$ .

#### b. Operadores de retardo

Peña (2010) indica, que para estudiar las propiedades de las series de tiempo es conveniente utilizar la notación de operadores de retardo  $L$ .

Las ecuaciones que permiten hallar las raíces de los polinomios para diferentes modelos AR(1), MA(q) se muestran en el anexo 7.

Court y Rengifo (2011) indican que un proceso AR (p) es estacionario si todas las raíces de la ecuación característica (ecuación en función del operador de retardos), caen fuera del círculo unitario, es decir, si todas las raíces de la ecuación característica son mayores que uno en valor absoluto.

### 2.3.5 ESTIMACIÓN Y VALIDACIÓN DEL MODELO

Para definir el modelo adecuado para explicar el comportamiento de una serie de tiempo, Gujarati y Poter (2010), indican una metodología consistente en cuatro pasos: identificación, estimación, contrastación y pronóstico. La metodología de Box-Jenkins en forma esquemática se presenta en la figura 4.

#### a. Identificación

González (2009) indica que el objetivo de esta etapa de la modelización es seleccionar el modelo ARIMA (p; d; q) apropiado para la serie, es decir, que reproduce las características de la serie.

La identificación del modelo se lleva a cabo en dos fases:

- 1 Análisis de estacionaridad, en el que se determinan las transformaciones que son necesarias aplicar para obtener una serie estacionaria. Este análisis consiste en:
  - Análisis de estacionaridad en varianza: transformaciones estabilizadoras de varianza.
  - Análisis de estacionaridad en media: número de diferencias  $d$  que hay que tomar para lograr que la serie sea estacionaria en media.

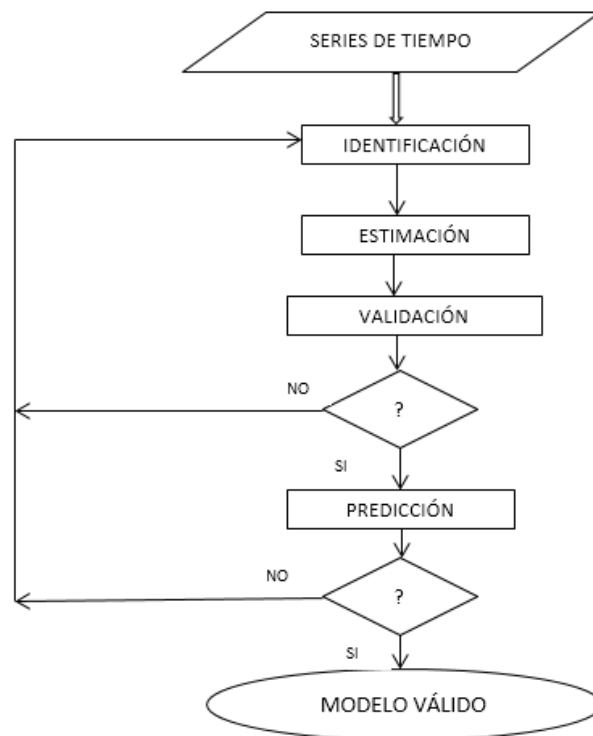


Figura 4: Procedimiento de estimación y validación del modelo según Box-Jenkins  
Fuente: Gujarati y Poter (2010)

- 2 Elección de los órdenes  $p$  y  $q$ . Una vez obtenida la serie estacionaria, el objetivo es determinar el proceso estacionario ARMA( $p$ ;  $q$ ) que la haya generado.

El mismo autor Gonzales (2010) afirma que los instrumentos que se van a utilizar en estas dos fases de la identificación del modelo son:

- Gráfico y correlogramas muestrales de la serie original.
- Gráfico y correlogramas muestrales de determinadas transformaciones de la serie: logaritmos, diferencias, etc.
- Contrastes de raíces unitarias.

Peña (2010) indica que en esta etapa el objetivo no es seleccionar un modelo, sino identificar un conjunto de modelos posibles que sean compatibles con el gráfico de la serie y sus funciones de autocorrelación simple y parcial. En la práctica, la mayoría de series reales puede aproximarse bien con los modelos ARMA p y q menores que tres para series no estacionales, y con P y Q menores que dos, para series estacionales.

La identificación de los posibles modelos requiere detectar la estacionaridad (estabilidad) o la no estacionaridad de la serie de tiempo. Si sucede el último caso (series no estacionarias), es necesario realizar transformaciones para obtener series estacionarias, que se pueden modelar mediante los modelos ARMA. Es decir, los modelos ARMA son para modelar series estacionarias, por lo que es necesario realizar la prueba de estacionaridad.

La identificación del modelo consiste en encontrar los valores de p y q de un modelo ARMA. Las herramientas principales para la identificación son la función de autocorrelación (FAC), la función de autocorrelación parcial (FACP) y los correlogramas.

Gujarati y Poter (2010), indican que en el estudio de propiedades de diversos procesos estándar ARMA consumiría mucho espacio, por lo que recomiendan unos lineamientos generales para identificar el tipo de modelo estocástico dado en el cuadro 2.

Cuadro 2: Patrones teóricos de FAC y FACP

TIPO DE MODELO	PATRÓN TIPO DE FAC	PATRÓN TIPO DE FACP
AR(p)	Disminuye exponencialmente o con patrón de onda senoide achatada o ambos	Picos significativos en los rezagos p
MA(q)	Picos significativos en los rezagos q	Decrece exponencialmente
ARMA(p,q)	Decrece exponencialmente	Decrece exponencialmente

Fuente: Gujarati y Poter (2010)

Peña (2010) indica que para juzgar cuándo un coeficiente de correlación es distinto de cero se necesita calcular el error estándar, los límites de confianza se trazan a  $\pm 2\sqrt{T}$  y se debe considerar como significativos a los coeficientes de autocorrelación y autocorrelación parcial que caen fuera de dichos límite, donde T representa el tamaño de la muestra.

Villavicencio (2016) indica que la identificación se realiza utilizando los datos ordenados cronológicamente donde se intentará sugerir un modelo que merezca la pena ser investigado. El objetivo es determinar los valores p y q que sean apropiados para reproducir la serie de tiempo. En esta etapa es posible identificar más de un modelo candidato que pueda describir la serie.

## b. Estimación

Gujarati y Poter (2010), indican que después de identificar los posibles modelos ARMA (p,q), la siguiente etapa consiste en estimar los parámetros de los modelos.

Definido el tipo de proceso que puede ser: autorregresivo (AR), medias móviles (MA), autorregresivos y medias móviles (ARMA), se debe estimar los parámetros del modelo (media, autocorrelación, variancia, etc). La estimación consiste en calcular el valor numérico de los parámetros del modelo, los que se obtienen mediante las ecuaciones que dependen del tipo del modelo ARMA (p,q).

González (2009) dice, una vez identificado el/los procesos estocásticos que han podido generar la serie temporal  $Y_t$ , la siguiente etapa consiste en estimar los parámetros desconocidos de dichos modelos:  $\phi_p, \theta_q, \rho_k, \sigma_\varepsilon^2, etc$ . Estos parámetros se pueden estimar de forma consistente por mínimos cuadrados o máxima verosimilitud a partir de los valores de la serie estacionaria.

### c. Validación o Selección del modelo

Peña (2010) indica que si suponemos que se han estimado un conjunto de modelos  $M_1, \dots, M_m$ , y de estos modelos se desea seleccionar el que mejor explica la serie observada, la selección del modelo puede enfocarse como un problema de discriminación, donde si tenemos los modelos  $M_i$  y una serie estacionaria  $w_t=(w_1, \dots, w_t)$ , la selección del modelo más compatible con la serie observada puede enfocarse desde el punto de vista clásico o Bayesiano. La aplicación del enfoque clásico no es útil porque compara la verosimilitud de distintos modelos, y entonces siempre el modelo con más parámetros tendrá mayor verosimilitud. Sin embargo, puede calcular el valor esperado de la verosimilitud para cada uno de los modelos, es decir, el valor que se espera obtener para la verosimilitud sobre muchas realizaciones del proceso si en cada uno estimamos los parámetros por máxima verosimilitud, y seleccionar aquel modelo que produzca un valor esperado más alto de esta verosimilitud esperada. Este enfoque que conduce al Criterio de Akaike y criterio de Schwarz planteado en el año 1978.

Sveinsson et al (2007) indican que la comparación entre modelos y selección de modelo adecuado se puede realizar mediante el uso de los criterios de información de Akaike modificado (AICC) y criterio de información de Schwarz modificado (SIC).

### i. Criterio de información de Akaike modificado (AICC)

El criterio de información de Akaike modificado (AICC) está dado por la ecuación (43).

$$AICC(p, q) = N \ln(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) + N + \frac{2(p+q+1)N}{(N-q-p-2)} \quad (43)$$

Donde:

$\hat{\sigma}_\varepsilon^2$  = estimador de la variancia del ruido blanco, obtenido mediante el método de máxima verosimilitud.

$N$  = tamaño de la muestra

$p$  = orden del modelo autorregresivo

$q$  = orden del modelo de media móvil

El modelo es seleccionado es el que presenta el valor mínimo de la ecuación (43).

Peña (2010) indica que si se utiliza el criterio de AICC para comparar modelos ajustados a una serie, es importante que  $N$  sea el mismo para todos los modelos.

## ii. Criterio de información de Schwarz modificado (SIC)

El criterio de información de Schwartz modificado (SIC) está dado por la ecuación (44).

$$SIC(p, q) = N \ln(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) + N + (p + q) \ln(N) \quad (44)$$

Donde:

$N$ ,  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ ,  $p$ ,  $q$  han sido definidos en la ecuación (43).

El modelo seleccionado es el que presenta el valor mínimo de la ecuación (44).

Peña (2010) indica que si comparamos las ecuaciones (43) y (44) se observa que SIC penaliza por tener menos parámetros que AICC, con lo que tiende a elegir modelos más parsimoniosos (modelos con menos parámetros). El mismo autor recomienda en la práctica usar el criterio de SIC.

## d. Diagnósis del modelo y pronóstico

Court y Rengifo (2011) indican que para verificar el modelo seleccionado existen dos métodos: el primero consiste en crear un modelo con más rezagos que los identificados en el paso previo y verificar que los rezagos extras no son estadísticamente significativos. El segundo método consiste en analizar los residuos del modelo seleccionado. Si el modelo seleccionado captura adecuadamente la dinámica de la variable, los errores deberían ser ruidos blancos, es decir, no autocorrelacionados.

Peña (2010) advierte que la diagnósis del modelo requiere comprobar que las hipótesis básicas realizadas a los residuos son ciertas. Estos residuos deben tener: (1) media marginal, igual a cero; (2) variancia marginal constante; (3) no debe existir correlación para cualquier retardo y (4) los residuos deben tener distribución normal.



González (2009) indica que el análisis de residuos consiste en una serie de contrastes de diagnóstico con el objetivo de determinar si los residuos replican el comportamiento de un ruido blanco, es decir, si su media es cero, su varianza es constante y si tienen las autocorrelaciones nulas. Los contrastes a realizar se describen a continuación:

1. Para comprobar si la media es cero, el estadístico de contraste está dado por la ecuación (45).

$$t = \sqrt{T} \frac{\bar{a}}{\sqrt{C_0(\hat{a})}} \sim N(0,1) \quad (45)$$

Donde:

$\bar{a}$  = media de los residuos muestrales

$C_0(\hat{a})$  = Varianza muestral de los residuos

Se acepta la hipótesis nula (que la media es cero) al nivel de significación del 5% si  $|t| \leq 1.96$ .

2. Varianza constante.

Si en el gráfico de los residuos la dispersión de los mismos es constante, se concluye que la varianza de  $a_t$  (residuo) permanece constante.

3. Ausencia de correlación serial

Si los residuos se comportaran como un ruido blanco, los coeficientes de la FAC y FACP muestrales deben ser prácticamente nulos para todos los retardos. Para comprobarlo, se utiliza el estadístico de contraste Ljung-Box dado por la ecuación (46).

$$Q^*(M) = T^*(T^* + 2) \frac{\sum_{k=1}^M \hat{\rho}_k^2(a)}{T^* - k} \sim \chi^2(M - p - q) \quad (46)$$

Donde:

M = número de rezagos (puede ser 5)

$T^*$  = tamaño de la muestra

Se rechaza la hipótesis nula de ausencia de correlación serial, para un nivel de significación del 5 %, para valores grandes del estadístico, es decir, si:

$Q^*(M) > \chi_{0.05}^2(M - p - q)$ . En este caso, existiría correlación serial en los residuos del modelo por lo que se concluye que el modelo no ha sido capaz de reproducir el patrón de comportamiento sistemático de la serie y habría que reformularlo.

4. Contraste de normalidad.

Peña (2100) asume que esta prueba es conveniente porque garantiza que la incorrelación implica la independencia y que no se está dejando información por modelizar.

La prueba de normalidad de los residuos se puede realizar mediante el test de coeficiente de asimetría indicado por Sveinsson et al (2007).

En la prueba estadística de asimetría las hipótesis estadísticas son:

$$H_0: g = 0, H_1: g \neq 0 \quad (47)$$

La hipótesis nula ( $H_0: g = 0$ ) indica que hay simetría en la distribución y la hipótesis alternante ( $H_1: g \neq 0$ ) indica que la distribución es asimétrica.

El valor de  $g_c$  se calcula con la ecuación (53). El valor de  $g$  tabular se calcula mediante la ecuación (48).

$$g_t = z_{1-\alpha/2} \sqrt{6/N} \quad \alpha = 0.1 \quad (48)$$

Si  $|g_c| > g_t$  se rechaza la hipótesis planteada; entonces la distribución de los datos es asimétrica, es decir, la distribución de los residuos no es normal, por lo tanto se debe buscar otro modelo.

Si  $|g_c| \leq g_t$  se acepta la hipótesis, es decir, los datos que se está analizando presentan una distribución normal.

## 2.4 SERIES DE TIEMPO HIDROLÓGICO

Custodio y Llamas (2001) sostienen que toda serie cronológica de datos hidrológicos consta de dos partes. Una de ellas es la componente aleatoria y la otra la componente determinística. La componente aleatoria representa la variabilidad intrínseca a todo fenómeno natural, que depende de tal número de variables que su valor es aleatorio. Matemáticamente, la componente aleatoria en el instante  $t$  y en el instante  $t+n\Delta t$  son independientes, o sea que el coeficiente de correlación serial (autocorrelación) de orden  $n$  es significativamente igual a cero. La componente determinística es la parte previsible del fenómeno. En hidrología determinística la variable temporal es explicada totalmente por otras variables que se desarrollan siguiendo un método adecuado, basado generalmente en leyes físicas de la naturaleza.

En hidrología probabilística, el interés no está centrado con la secuencia temporal, pero sí en la probabilidad de que un evento sea igualado o excedido, es decir, que está basado en la ley de las probabilidades.

### 2.4.1 ANÁLISIS DE LAS SERIES DE TIEMPO HIDROLÓGICO

Para el análisis de series hidrológicas es importante evaluar las propiedades estadísticas de las series hidrológicas de tiempo anual y estacional. Además, es importante identificar y evaluar las tendencias, los saltos y la estacionalidad.

El análisis de las series de tiempo hidrológico se ha convertido en una herramienta importante en la hidrología; es utilizado para la construcción de modelos matemáticos, para generar registros sintéticos de hidrología, para pronosticar los eventos hidrológicos, para detectar tendencias, saltos, para llenar datos incompletos y para extender o ampliar los registros de datos.

#### a. Métodos para el análisis de las series de tiempo hidrológico

Custodio y Llamas (2001) mencionan los siguientes métodos en el estudio de series cronológicas: autocorrelación, análisis espectral, amplitud de variación, conjunto de características parecidas y el análisis de tendencias.

##### ▪ Autocorrelación

Si la serie es estacionaria y se obtienen los coeficientes de correlación serial (o autocorrelación) de orden 1, 2, ..., k, se puede encontrar los coeficientes de correlación para los diferentes desfases k. La forma del correlograma está relacionada al carácter de la serie cronológica; si la serie es periódica su correlograma también es periódico; si la serie es lineal da correlograma lineal. Si los valores de la serie son independientes, el valor del correlograma se aproxima a cero para k=1. La autorrelación se muestra en la figura 5.

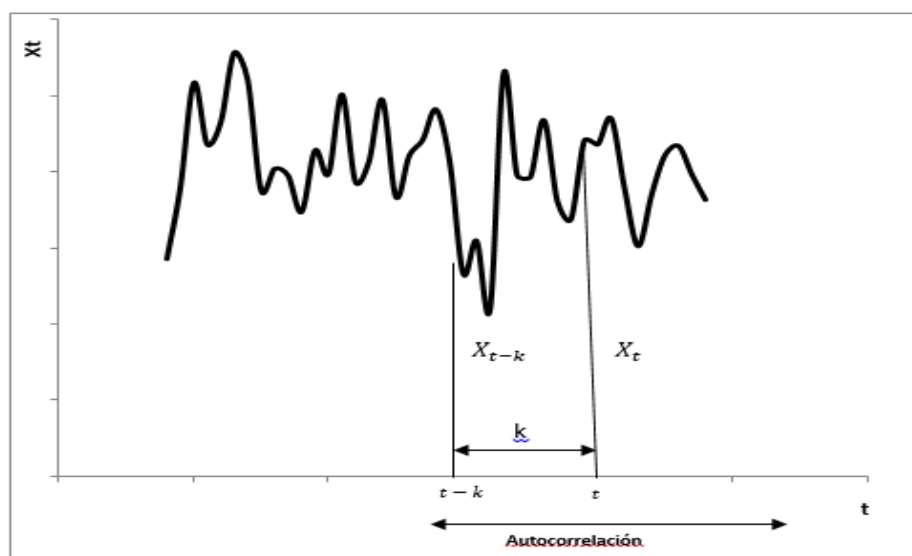


Figura 5: Series de tiempo autocorrelacionadas

- **Análisis espectral**

Es un método matemático que estudia el espectro de densidad, que es la relación entre cada intervalo de frecuencia y la varianza explicada por dicho intervalo se cumpla establece que el área encerrada por la curva sea igual a la varianza total.

- **Amplitud de variación (Range)**

Este método consiste en el estudio de las desviaciones acumuladas con respecto a la media: De este modo se obtiene los déficits o excesos acumulados. Este método es aplicado en los problemas de almacenamiento y regulación de sistemas de recursos hidráulicos.

- **Conjunto de características parecidas (Runs)**

Este método es una teoría desarrollada para el estudio del sistema de recursos hidráulicos en que se describe estadísticamente la aparición de series secas o húmedas. Se considera como variable este carácter, es decir, si se trata de un periodo seco (inferior a la media) o húmedo (superior a la media).

## **2.4.2 CLASIFICACIÓN DE LAS SERIES DE TIEMPO HIDROLÓGICO**

Según Maidment (1993) las series hidrológicas se pueden clasificar en varias series simples, múltiples, correlacionadas, no correlacionadas, intermitentes, con sucesos contables, con intervalos de tiempo constante, con intervalos de tiempo no constante, estacionarias y no estacionarias. De esta clasificación, para el modelamiento estocástico de las descargas, es importante definir series correlacionadas y series estacionarias.

### **a. Series hidrológicas correlacionadas y no correlacionadas**

En el análisis de las series de tiempo es importante evaluar la dependencia (lineal) de la variable hidrológica en el instante  $t$  y en tiempo  $t-k$ , *para*  $k = 1, 2, \dots$ . La dependencia se mide con el coeficiente de autocorrelación que consiste en correlacionar las variables de la misma serie hidrológica pero con un retardo o desplazamiento  $k$ , como se muestra en la figura 5. Si hay correlación significativa hay dependencia y se denomina serie de tiempo autocorrelacionada, o serie correlacionada o correlacionada temporalmente. Si no hay autocorrelación significativa de la serie hidrológica en el tiempo con desfase  $k$  son series no correlacionadas, es decir, no hay dependencia, por lo tanto se trata de series independientes.

En algunas series hidrológicas la dependencia o la existencia de la autocorrelación significativa se presentan en las descargas de un río, que resultan ser efecto de almacenamiento superficial, almacenamiento en el suelo y del almacenamiento de aguas subterráneas; estas diversas formas de almacenamiento hacen que existan descargas de los ríos en periodos posteriores. Por ejemplo, las cuencas con almacenamiento superficial significativo en forma de lagos, pantanos, o glaciares producen en la cuenca hidrográfica series de descargas en tiempos rezagados (posteriores), es decir las descargas dependen de las descargas del tiempo pasado. Del mismo modo, las series de almacenamiento subterráneo especialmente las aguas subterráneas producen la autocorrelación significativa en las descargas superficiales. Por el contrario, las series de descargas máximas anuales (picos de las crecidas) suelen ser series no correlacionadas (Maidment 1993).

#### **b. Series hidrológicas estacionarias y no estacionarias**

Una serie hidrológica es estacionaria cuando los parámetros estadísticos de la serie, tales como la media, la varianza y la autocovarianza permanecen constantes a través del tiempo; esta forma de medir la estacionaridad es subjetiva. La estacionaridad se evalúa estadísticamente con la prueba de raíz unitaria.

Una serie hidrológica es no estacionaria si existen saltos, tendencias o periodicidades (ciclicidad), es decir los parámetros estadísticos como la media, varianza y la autocovarianza varían a través del tiempo. Estas series tienen raíz unitaria.

En general, las series hidrológicas anuales son estacionarias, aunque esta suposición es incorrecta si se tiene en cuenta la influencia de la variabilidad climática, perturbaciones naturales como una erupción volcánica y cambios de origen humano, tales como el efecto de la construcción de embalses en el flujo aguas abajo. Las series hidrológicas menores a un año como la serie mensual, son series no estacionarias, debido básicamente a la ciclicidad anual. Series no anuales (mensuales, semanales o diarias) son procesos estocásticos no estacionarios debido a que presentan periodicidades en la media, en la desviación estándar, en algunos coeficientes de autocorrelación y la estructura de dependencia puede ser descrita por los modelos Markovianos (Maidment 1993).

Para el modelamiento estocástico las series deben ser estacionarias, y las series no estacionarias deben ser transformadas en estacionarias.

### 2.4.3 COMPONENTES DE LA ESTRUCTURA DE LA SERIE DE TIEMPO HIDROLÓGICO

Una serie de tiempo hidrológico puede ser dividida o descompuesta en sus componentes, como son: tendencias, cambios o saltos, estacionalidad, etc.

#### a. Saltos y tendencias

En general, los factores naturales y provocados por el hombre pueden producir tendencias graduales y cambios (saltos) instantáneos en series hidrológicas.

Maidment (1993), indica que el calentamiento global y cambios climáticos están creando conciencia en los hidrólogos de la existencia de tendencias y saltos en las series de tiempo hidrológico. Para fines de pronóstico se deben tener series hidrológicas libres de tendencia y saltos.

#### i. Saltos

En una serie hidrológica se pueden presentar saltos en una o más de sus características estadísticas. El salto puede ser positivo (hacia arriba) o negativo (hacia abajo); los saltos usualmente se analizan en la media y la varianza. La existencia del salto en la media se muestra en la figura 6.

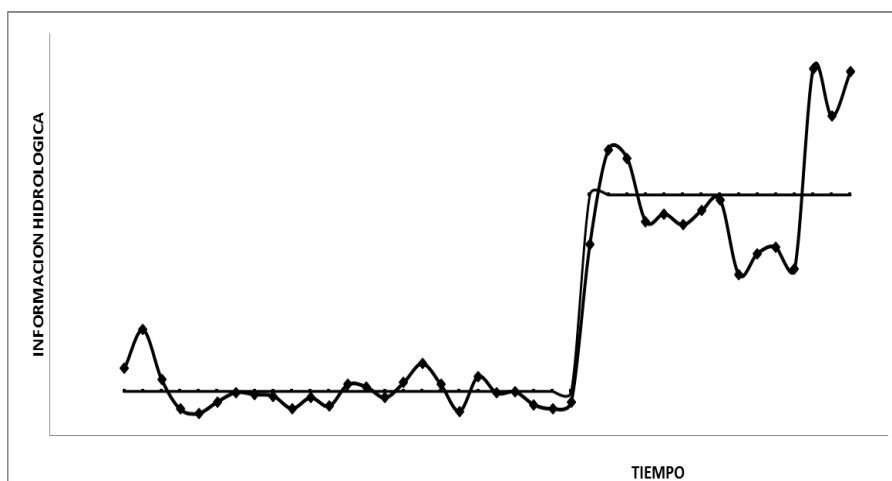


Figura 6: Salto en la media.

#### ii. Tendencias

Una tendencia en la serie de tiempo hidrológico puede presentarse cuando hay cambios graduales en una o más de sus características estadísticas. Las más comunes son las tendencias en la media y la varianza. Puede existir tendencia lineal o tendencia curvilínea. Un ejemplo de tendencia lineal en la media se muestra en la figura 7.

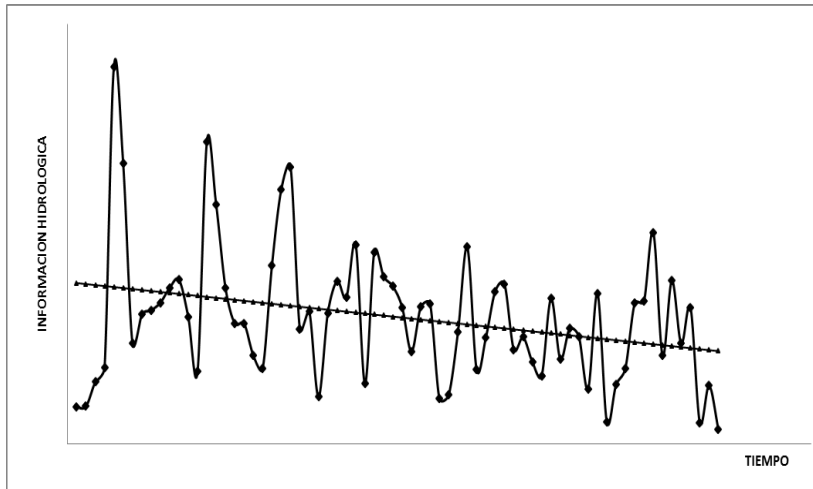


Figura 7: Tendencia lineal en la media  
Fuente: elaboración propia

**b. Estacionalidad**

Aliaga (1985) indica que la serie hidrológica para intervalos de tiempo menores a un año (como las series mensuales), por lo general, tiene comportamiento cíclico (o periódico) que es el resultado de las variaciones de las estaciones del año que están relacionadas con el movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol durante un año. Algunas series hidrológicas pueden tener comportamiento periódico: semanal, diario, mensual, etc. En general, son importantes las variaciones estacionales o periódicas en la media, la varianza, covarianza, y la asimetría.

En la figura 8 se muestran las series de tiempo anual: Estas series anuales no presentan estacionalidad.

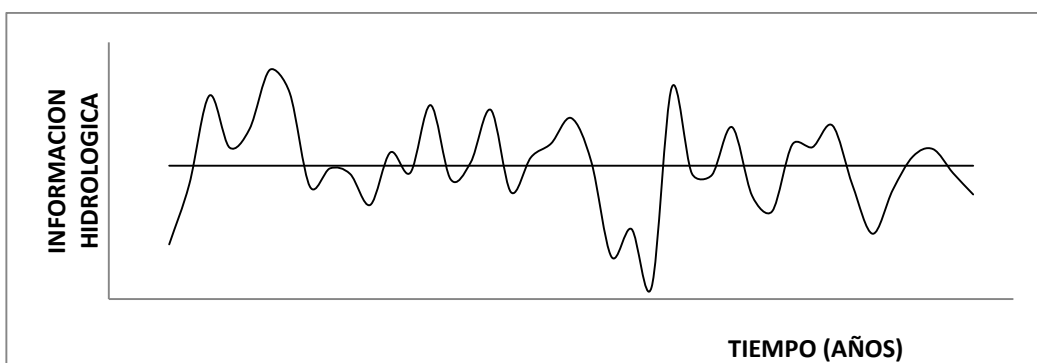


Figura 8: Series hidrológicas anuales.  
Fuente: elaboración propia

En la figura 9 se muestra las series de tiempo mensual, estas series mensuales son cíclicas (dependen de las variaciones estacionales) en cada año.

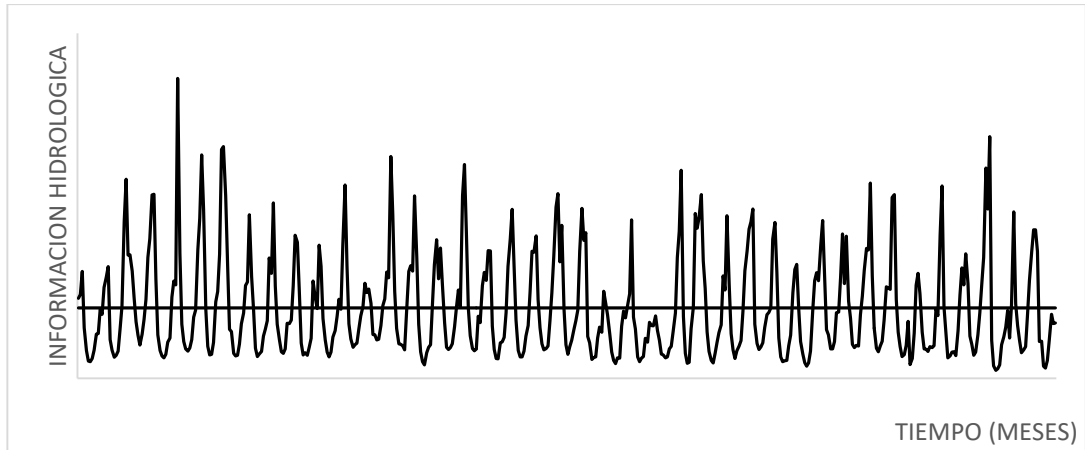


Figura 9: Series hidrológicas mensuales  
Fuente: elaboración propia

## 2.4.4 ESTADÍSTICAS DE LAS SERIES DE TIEMPO HIDROLÓGICO

### a. Estadísticas generales de la muestra

Maidment (1993), indica que en el análisis de series de tiempo hidrológico es importante evaluar las estadísticas de las series anuales y estacionales como son: media, varianza, desviación estándar, coeficiente de variación, coeficiente de asimetría, coeficiente de autocorrelación, autocovarianza; también es importante analizar el correlograma. Los correlogramas permiten definir el modelo estocástico apropiado para la serie hidrológica. Los coeficientes de autocorrelación sirven para medir el grado de dependencia en la serie de tiempo.

Las estadísticas que caracterizan a las series de tiempo son:

$$\bar{y} = \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{t=1}^N y_t \quad (49)$$

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^N (y_t - \bar{y})^2 \quad (50)$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^N (y_t - \bar{y})^2} \quad (51)$$

$$c_v = \frac{s}{\bar{y}} \quad (52)$$

$$g = \frac{N \sum_{t=1}^N (y_t - \bar{y})^3}{(N-1)(N-2)s^3} \quad (53)$$

Donde:

$N$  = tamaño de la muestra

$\bar{y}$  = media de la muestra

$s^2$  = varianza

$s$  = desviación estándar



$c_v$  = coeficiente de variación

$g$  = coeficiente de sesgo

Las estadísticas de la muestra  $\bar{y}$ ,  $s^2$ ,  $c_v$  y  $g$  son estimadores de los parámetros de la población ( $\mu$ ,  $\sigma^2$  y  $\gamma$ ). La autocorrelación de la muestra o la función  $r_k$  (coeficiente de autocorrelación) de una serie temporal puede ser estimada con la ecuación 9; la autocovarianza se estima con la ecuación (5).

#### b. Estadísticas estacionales de la muestra

Las series estacionales, tales como las descargas mensuales pueden ser descritas considerando las estacionalidades. La serie estacional se representa por  $y_{v,\tau}$  donde  $v$  es el año y  $\tau$  es el periodo estacional, los valores son:  $v = 1, \dots, N$ ,  $\tau = 1, \dots, \omega$ .  $N$  representan número de años de registro y  $\omega$  el número de estacionalidades del año (por ejemplo 12 si la periodicidad o la estacionalidad es mensual). La media estacional  $\bar{y}_\tau$  se obtiene para cada periodo estacional  $\tau$  mediante la ecuación (54).

$$\bar{y}_\tau = \frac{1}{N} \sum_{v=1}^N y_{v,\tau} \quad \tau = 1, \dots, \omega \quad (54)$$

De la misma manera se puede obtener la varianza y el coeficiente de sesgo para cada periodo estacional para  $\tau = 1, \dots, \omega$ .

Además el coeficiente de autocorrelación  $r_k$  para cada estacionalidad o periodicidad se determina con la siguiente ecuación:

$$r_{k,\tau} = \frac{c_{k,\tau}}{(c_{0,\tau} c_{0,\tau-k})^{0.5}} \quad (55)$$

$$c_{k,\tau} = \frac{1}{N} \sum_{v=1}^N (y_{v,\tau} - \bar{y}_\tau)(y_{v,\tau-k} - \bar{y}_{\tau-k}) \quad (56)$$

## 2.5 MODELAMIENTO DE LAS SERIES DE TIEMPO HIDROLÓGICO

Muchos modelos pueden ser aplicables a los procesos hidrológicos, generalmente se pueden modelar las descargas de los ríos y las precipitaciones. Estos modelos deben ser capaces de reproducir las características estadísticas más importantes de las series de tiempo hidrológico como la media, la desviación estándar, el valor máximo, el valor mínimo, etc.

Para el caso de series hidrológicas Maidment (1993), indica que existen los modelos para las series estacionales como son los modelos periódicos de media móvil (modelos PARMA).

### 2.5.1 MODELAMIENTO DE LAS SERIES NO PERIÓDICAS

En el punto (2.3.4) se ha descrito los modelos para las series de tiempo no periódicas o no estacionales en general como los modelos AR(p), MA(q) y ARMA(p,q).

Los modelos estacionarios autorregresivos, de media móvil y autorregresivos y media móvil son aplicados ampliamente en el modelamiento en la hidrología estocástica de las series anuales, donde la media, la varianza y la estructura de correlaciones no dependen del tiempo. Estos modelos son apropiados para la serie de caudales anuales.

### 2.5.2 MODELAMIENTO DE LAS SERIES PERIÓDICAS SIMPLES

Para las series de tiempo hidrológico como las mensuales, las estadísticas estacionales como la media, desviación estándar, pueden ser reproducidas por un modelo estacionario ARMA (modelo autorregresivo y de media móvil) por medio de la normalización de las series estacionales. Sin embargo, en este procedimiento se supone que las correlaciones estacionales (mes a mes) son las mismas para un determinado desfase. Las series de tiempo hidrológico, tales como las descargas mensuales, suelen ser caracterizadas por la dependencia de las diferentes estructuras (correlaciones mes a mes) en función de la estación (por ejemplo las descargas de primavera o del otoño). Si el número de estaciones del año o el número de periodicidades es  $\omega$ , entonces el modelo consta de  $\omega$  modelos individuales ARMA(p,q) donde la dependencia es a través de meses en lugar de años. Los modelos periódicos como los autorregresivos periódicos (PAR), modelos autorregresivos y de media móvil (PARMA) son recomendados para modelar la estructura de las dependencias periódicas. (Maidment 1993).

#### a. Modelos autorregresivos periódicos (PAR)

Asumiendo que un proceso hidrológico es representado por  $y_{v,\tau}$  donde  $v$  es el año y  $\tau$  son las estaciones como  $\tau = 1, \dots, \omega$ ,  $\omega$  es el número de estaciones en el año;  $\omega$  es igual a 12 si se trata de meses (estaciones) del año,  $\tau$  puede representar un día, un mes o una estación (verano, otoño, invierno o primavera).

Una serie periódica simple se puede representar mediante la ecuación (57).

$$y_{v,\tau} = \mu_{\tau} + \sum_{j=1}^p \phi_{j,\tau} (y_{v,\tau-j} - \mu_{\tau-j}) + \varepsilon_{v,\tau} \quad (57)$$

Donde:

$\varepsilon_{v,\tau}$  = es la componente no correlacionada, de distribución normal con media cero y varianza  $\sigma_{\tau}^2(\varepsilon)$ , por cada época estacional  $\tau$

$\mu_\tau$ , = media periódica (media mensual si  $\tau$  es mes)

$\phi_{j,\tau}$  = Parámetro del modelo del mes  $\tau$  de orden  $j$ .

Los parámetros del modelo son:  $\mu_\tau, \phi_{j,\tau}, \dots, \phi_{p,\tau}$  y  $\sigma_\varepsilon^2(\varepsilon)$  para  $\tau = 1, \dots, \omega$ . El modelo de la ecuación (57) es denominado modelo PAR(p). Si en la ecuación se tiene  $\tau - j \leq 0$  entonces  $y_{v,\tau-j}$  se convierte en  $y_{v-1,\omega+\tau-j}$  y  $\mu_{\tau-j}$  se convierte en  $\mu_{\omega+\tau-j}$ . Si en la ecuación (57)  $p=1$ , se tiene el modelo PAR(1) dado por la siguiente ecuación:

$$y_{v,\tau} = \mu_\tau + \phi_{1,\tau}(y_{v,\tau-1} - \mu_{\tau-1}) + \varepsilon_{v,\tau} \quad (58)$$

Según Maidment (1993), los parámetros del modelo PAR(1) se estiman mediante las siguientes ecuaciones:

$$\hat{\mu}_\tau = \bar{y}_\tau \quad (59)$$

$$\hat{\phi}_{1,\tau} = \left( \frac{s_\tau}{s_{\tau-1}} \right) r_{1,\tau} \quad (60)$$

$$\hat{\sigma}_\tau^2(\varepsilon) = s_\tau^2 - s_{\tau-1}^2 \phi_{1,\tau}^2 \quad (61)$$

Donde:

$\bar{y}_\tau$  = media periódica (mensual)

$s_\tau$  = desviación estándar periódica (mensual)

$r_{1,\tau}$  = coeficiente de correlación con retardo 1 (por ejemplo mes 3 con el mes cuatro cuando  $\tau = 4$  que es el cuarto mes).

## b. Modelos autorregresivos periódicos y de media móvil (PARMA)

Los modelos ARMA periódicos (PARMA) han sugerido en la literatura para modelar la estructura de dependencia de las periodicidades. Un modelo PARMA (p, q) puede expresarse por:

$$y_{v,\tau} = \sum_{i=1}^p \phi_{i,\tau} y_{v,\tau-i} + \varepsilon_{v,\tau} - \sum_{i=j}^q \theta_{i,\tau} \varepsilon_{v,\tau-j} \quad (62)$$

Donde:

$y_{v,\tau}$  = representa la serie hidrológica del año  $v$  del mes  $\tau$

$v, \tau$  = ya han sido definidas (ver la ecuación 57).

Para cada periodo (mes, semana, etc.) el proceso es normalmente distribuido con media cero y varianza  $\sigma_\tau^2(Y)$ .  $\varepsilon_{v,\tau}$  es el término ruido no correlacionado para cada periodo distribuido normalmente con media cero y varianza  $\sigma_\tau^2(\varepsilon)$ .

$\{\phi_{1,\tau}, \dots, \phi_{p,\tau}\}$  son los parámetros periódicos autorregresivos y  $\{\theta_{1,\tau}, \dots, \theta_{q,\tau}\}$  son los parámetros de medias móviles. Si el número de periodos del año o el número de periodicidades

es  $\omega$  entonces el modelo consta de  $\omega$  modelos individuales ARMA(p,q) donde la dependencia es a través de los periodos en lugar de años.

Según Maidment (1993), los parámetros del modelo PARMA(1,1) se estiman mediante las siguientes ecuaciones:

$$\hat{\theta}_{1,\tau} = \frac{c_{2,\tau}}{c_{1,\tau-1}} \quad (63)$$

$$\hat{\theta}_{1,\tau} = \hat{\theta}_{1,\tau} + \frac{(s_{\tau}^2 - \hat{\theta}_{1,\tau} c_{1,\tau})}{(\hat{\theta}_{1,\tau} s_{\tau-1}^2 - c_{1,\tau})} - \frac{(\hat{\theta}_{1,\tau+1} s_{\tau}^2 - c_{1,\tau+1})}{(\hat{\theta}_{1,\tau} s_{\tau-1}^2 - c_{1,\tau}) \hat{\theta}_{1,\tau+1}} \quad (64)$$

$$\hat{\sigma}_{\tau}^2(\varepsilon) = \frac{\hat{\theta}_{1,\tau} s_{\tau-1}^2 - c_{1,\tau+1}}{\hat{\theta}_{1,\tau+1}} \quad (65)$$

$$c_{k,\tau} = \frac{1}{N} \sum_{v=1}^N (y_{v,\tau-k} - \bar{y}_{\tau-k})(y_{v,\tau} - \bar{y}_{\tau}) \quad (66)$$

Para  $\tau = 1, \dots, \omega$

## 2.6 ANÁLISIS DE INCERTIDUMBRE

Según Diebold (2001) los pronósticos están sujetos por lo menos a tres tipos de errores o incertidumbres: incertidumbre de especificación, incertidumbre de innovación y la incertidumbre de parámetro. La incertidumbre de especificación se refleja porque todos los modelos son simplificaciones intencionales que se espera que capturen las propiedades destacadas de los datos para fines de pronóstico, este error por ejemplo se refleja al usar criterios de selección del modelo. La incertidumbre de innovación se refleja en el desconocimiento de las futuras innovaciones en el pronóstico; es el error de pronóstico considerado en forma explícita en los cálculos de pronóstico de intervalo y densidad. La incertidumbre de parámetro, se refleja en la estimación de parámetros para producir los pronósticos, se conoce que estos coeficientes son solo estimados que están sujetos a la variabilidad en el muestreo.

Lee, Salas y Boes (2007) sostienen que las incertidumbres en los recursos hídricos suelen surgir de la naturaleza hidrológica y de la limitada información (datos) disponible con respecto a la verdadera naturaleza del proceso; dado que los parámetros de los modelos se calculan utilizando los registros históricos limitados, estas estimaciones son cantidades inciertas. El comportamiento estocástico del proceso de las series de tiempo hidrológico se interpreta mediante modelos matemáticos que dependen de una serie de parámetros que deben ser estimados a partir de información histórica. Si los datos históricos disponibles fueran suficientemente largos (por ejemplo, cientos de años), los parámetros del modelo podrían estimarse con una buena precisión (certidumbre), y las muestras sintéticas producidas a partir

del modelo reflejarían la variabilidad esperada del proceso considerado. Pero las longitudes habituales de los registros históricos son cortas, lo que significa que los parámetros del modelo son inciertos (incertidumbre) y, por consiguiente, la variabilidad de las variables de diseño puede ser incierta más allá de lo esperado.

Según Ferriols y Alós (2011) los métodos de análisis de incertidumbre son varios, de los cuales los métodos aplicables a las series de tiempo son: análisis de sensibilidad y simulación de Montecarlo.

### **2.6.1 SIMULACIÓN DE MONTE CARLO**

Según Ferriols y Alós (2011) es un método estocástico que genera números aleatorios para diferentes escenarios, que se obtiene como resultado de las combinaciones de los posibles valores de las variables introducidas en el modelo según su distribución de probabilidad. El método se llamó así en referencia al Casino de Monte Carlo, por ser la capital del juego de azar.

Básicamente, este método asigna a cada una de las variables inciertas del modelo, no un único valor, sino un rango de valores y la probabilidad de que tome cada uno de estos valores (distribución). Una vez definido el modelo (en general, mediante árboles de decisión o cadenas de Markov), se realiza la simulación de Monte Carlo, asignando aleatoriamente el valor a cada una de las variables definidas como inciertas (dentro del rango especificado para cada una). Con un número suficiente de iteraciones (cantidad de veces que se asigna valores a las diferentes variables aleatorias), el valor obtenido representa la media de una distribución de probabilidades de un conjunto definido de valores posibles para las variables inciertas a un porcentaje de aceptación.

### **2.6.2 DIAGRAMA DE CAJA**

Bakieva et al (2010), indican que el diagrama de caja es un tipo de gráfico que nos permite interpretar los datos para las variables, a través de cuál podemos observar cuartiles, valores mínimo y máximo, mediana y los valores atípicos.

El diagrama de caja es una presentación visual que describe varias características importantes de los datos o datos generados, tales como el centro, la dispersión, la simetría o asimetría y la identificación de observaciones atípicas.

### **III. MATERIALES Y MÉTODOS**

#### **3.1 MATERIALES**

Los materiales usados para el modelamiento estocástico son las descargas medias anuales, mensuales y los parámetros físicos de las cuencas (área de la cuenca y el área glaciar) de los ríos: Yanayacu, Negro, Quillcay, Marcará, Llanganuco, Parón, Colcas, Los Cedros y Quitaracsa. Esta información ha sido recopilada de Suárez (2011) y ANA (2011).

Las informaciones de los caudales medios mensuales, se muestra en el cuadro 3 donde se observa los datos de 41 años comprendidos entre 1967 a 2008. Los caudales mensuales se muestran en el anexo 1. Los parámetros físicos de las cuencas en estudio se muestran en el cuadro 4. Estos datos corresponden a la publicación hecha por ANA (2011).

##### **3.1.1 DESCRIPCIÓN DE LA CUENCA DEL RÍO SANTA**

El Ministerio de Vivienda, Construcción y Saneamiento. Instituto Nacional de Desarrollo (2002), describen: Políticamente, la cuenca del río Santa está comprendida en los departamentos de Ancash (provincias de Recuay, Huaraz, Carhuaz, Yungay, Huaylas, Corongo, Pallasca y Santa) y la Libertad (provincias de Virú y Santiago de Chuco). Limita por el norte con parte de las Cuencas de Chao, Virú, Moche y Crisnejas; por el Sur con parte de la cuenca Lacramarca, Pativilca y Fortaleza; por el Este con la línea de cumbres de la Cordillera Blanca que constituye la divisoria de las aguas con la cuenca del Marañón, y por el oeste con las cuencas Nepeña, Casma, Huarmey y el océano Pacífico. La cuenca del río Santa, tiene una altitud máxima de 6768 m.s.n.m que alcanza el nevado Huascarán, altitud media de 2100 m s.n.m (Caraz) y mínima en la desembocadura en el mar. El río Santa tiene una longitud aproximada de 294 km. La cuenca del río Santa está ubicada en el Norte del País y forma parte de la Cordillera Blanca y Negra de la Vertiente Occidental del Pacífico. Sus coordenadas geográficas están comprendidas entre los paralelos 10°08' y 8°04' latitud Sur y los meridianos 78°38' y 77°12' longitud Oeste.

La cuenca del río Santa tiene una extensión de 12200 km<sup>2</sup> de la cual el 83 %, es decir 10200 km<sup>2</sup> corresponden a la cuenca húmeda, denominada así por encontrarse encima de los 2000 m.s.n.m, cota fijada como límite del área de escurrimiento superficial.

Cuadro 3: Disponibilidad de datos de caudales medios mensuales de las cuencas en estudio

NOMBRE	1967-68	1968-69	1969-70	1970-71	1971-72	1972-73	1973-74	1974-75	1975-76	1976-77	1977-78	1978-79	1979-80	1980-81	1981-82	1982-83	1983-84	1984-85	1985-86	1986-87	1987-88	1988-89	1989-90	1990-91	1991-92	1992-93	1993-94	1994-95	1995-96	1996-97	1997-98	1998-99	1999-00	2000-01	2001-02	2002-03	2003-04	2004-05	2005-06	2006-07				
Quitarcasa	X	X	O	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	O	O	O	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C		
Los Cedros	X	X	O	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	O	C	C	C	C	C	C	C	C		
Colcas	X	X	O	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	O	X	O	X	O	O	O	X	X	O	X	O	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C		
Parón	X	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	O	O	X	X	O	O	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C		
Llanganuco	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	O	O	O	O	X	X	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	
Chancos	X	X	X	X	O	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	O	X	O	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	
Quillcay	C	C	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X	O	O	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	
Olleros	C	C	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	O	X	X	X	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	
Querococha	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	O	X	X	X	X	X	X	O	O	O	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C

- x Datos mensuales completos
- o Datos mensuales completados
- c Datos mensuales todos faltantes extendidos por Suárez (2010)

Fuente: Suárez 2011.

Cuadro 4: Parámetros geomorfológicos de las cuencas en estudio

CUENCA	RIO	ESTACION	AREA DE LA CUENCA KM2	AREA GLACIAR KM2	PORCENTAJE DE GLACIARES
SANTA	YANAYACU	QUEROCOCHA	66	2.1	3.18
SANTA	NEGRO	OLLEROS	176	28.5	16.19
SANTA	QUILLCAY	QUILLCAY	250	45.9	18.36
SANTA	MARCARA	CHANCOS	271	65.3	24.10
SANTA	LLANGANUCO	LLANGANUCO	87	33.7	38.74
SANTA	PARON	PARON	45	21.2	47.11
SANTA	COLCAS	COLCAS	236	39	16.53
SANTA	LOS CEDROS	LOS CEDROS	116	24	20.69
SANTA	QUITARACSA	QUITARACSA	390	30	7.69

Fuente: ANA 2011. Área de la cuenca y área glaciar.

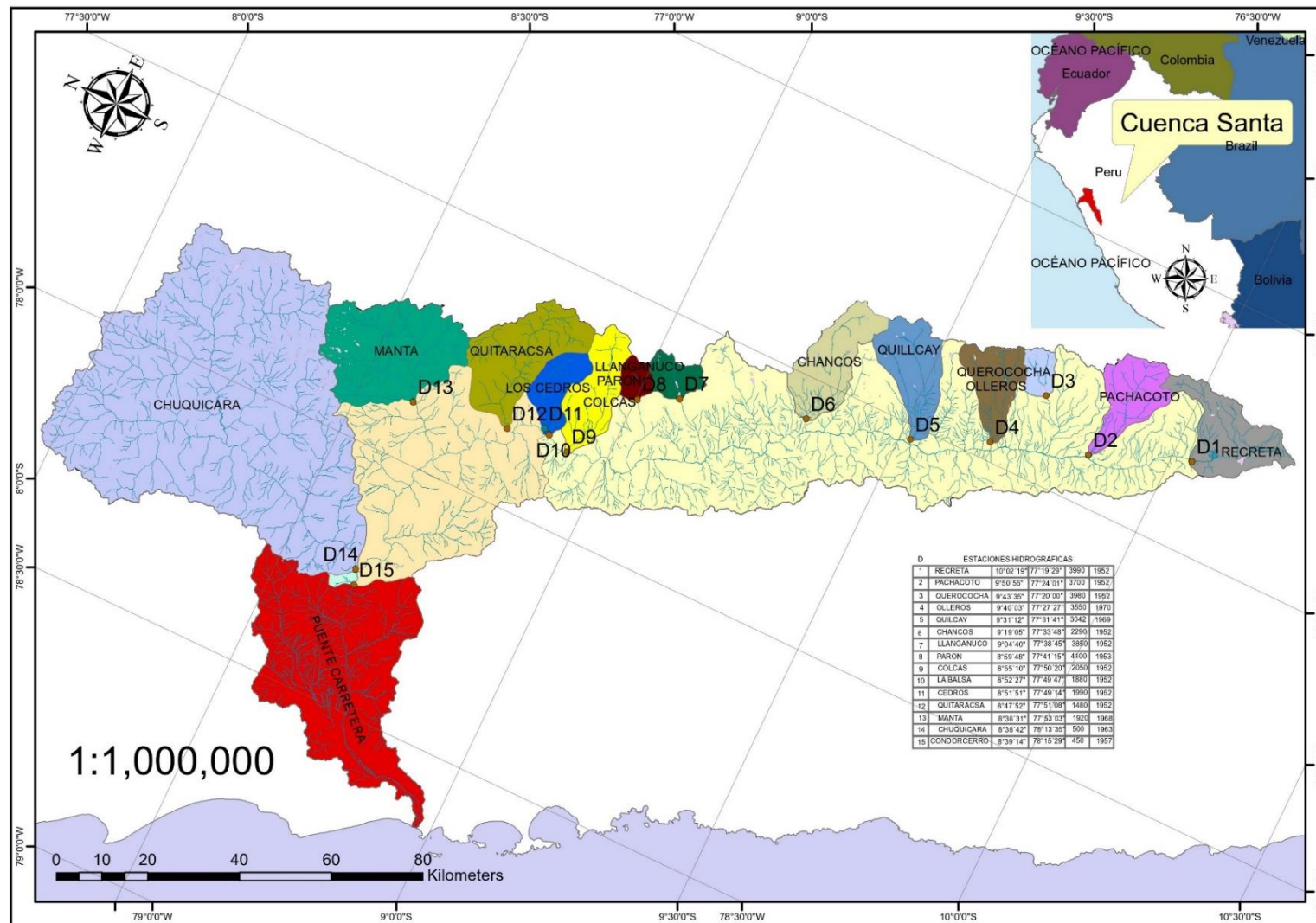


Figura 10: Mapa de ubicación de las 9 subcuencas en estudio (cuena del río Santa)



La topografía es plana en la parte baja con pendientes menores al 15%; ondulada, empinada y/o escarpada en la cordillera de los Andes con pendientes mayores del 15%, en los valles interandinos de la parte media y alta existen áreas planas y colinosas con pendientes de 15% a 45%. En la parte baja tiene un valle, denominado Santa, muy importante por su contribución a la economía de la Región.

En la figura 10 se muestra la cuenca del río Santa y la ubicación de las cuencas consideradas en el estudio.

## **3.2 MÉTODOS**

La modelación de las series de tiempo hidrológico se ha realizado siguiendo el procedimiento indicado en la figura 11. El modelamiento estocástico de las descargas medias anuales y mensuales, se ha aplicado a los ríos de la cuenca del río Santa.

### **3.2.1 RECOPIACIÓN DE DATOS**

Los datos recopilados para el modelamiento estocástico, son las descargas medias mensuales y los parámetros físicos de la cuenca como: área de la cuenca y el área glaciar. Los datos recopilados se muestran en el anexo 1 y en el cuadro 4.

### **3.2.2 TRATAMIENTO DE DATOS**

El tratamiento de las descargas de las cuencas en estudio ha consistido en el análisis de consistencia de las descargas de los ríos en estudio. Teniendo una información consistente, el siguiente paso es completar los datos faltantes y extender los datos de descargas de estaciones hidrológicas de registro corto a fin de tener información hidrológica consistente, completa y suficiente.

#### **a. Análisis de consistencia**

Alude a analizar la información de descargas medias mensuales de las cuencas en estudio mediante criterios físicos y estadísticos que permiten detectar, evaluar y eliminar los saltos y tendencias.

#### **i. Análisis de salto**

Análisis de saltos se ejecuta mediante los siguientes procesos: análisis gráfico, análisis de doble masa, análisis estadístico, corrección de datos y la verificación de la información corregida.

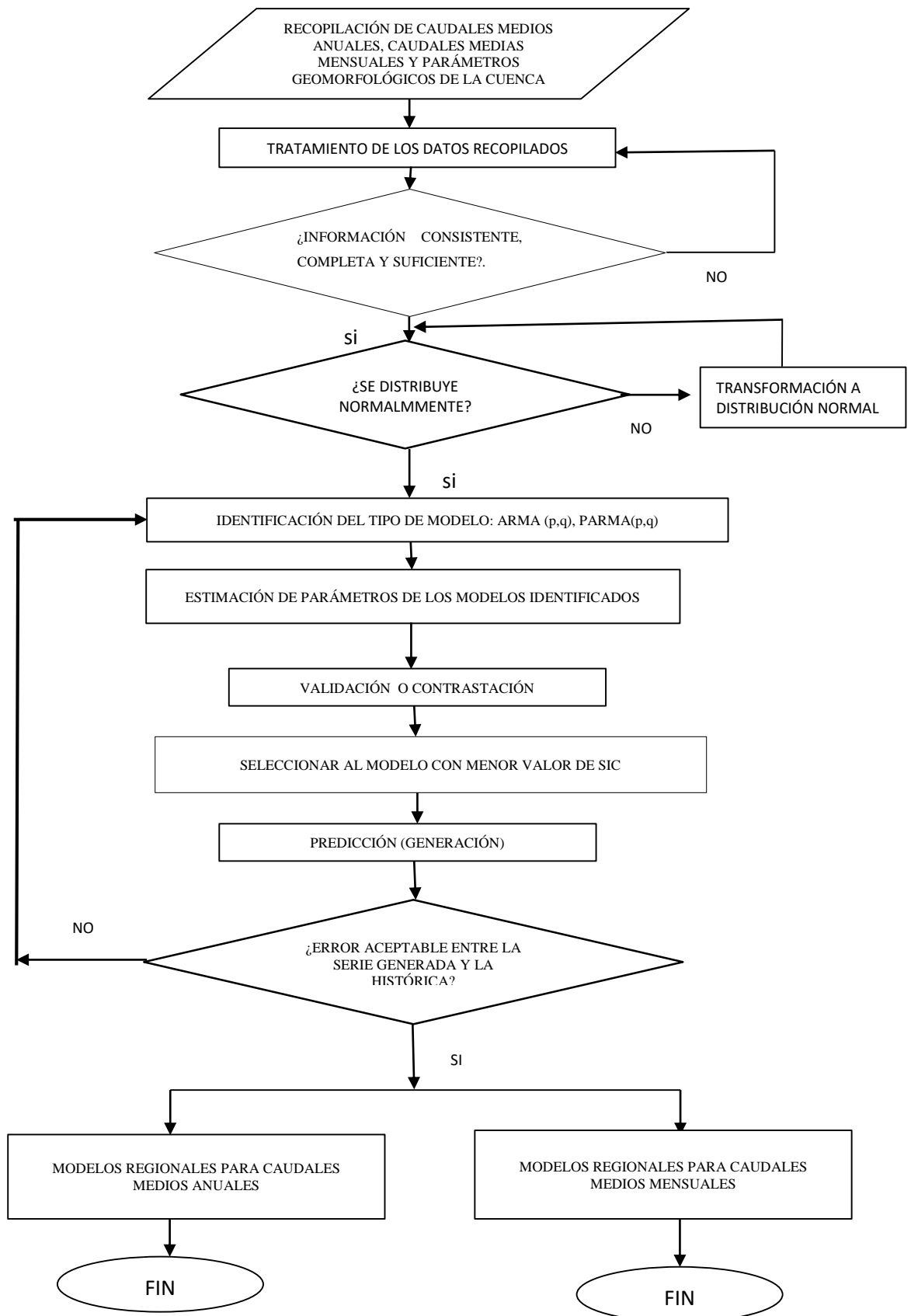


Figura 11: Diagrama de flujo para la modelación de las series hidrológicas

### 1. Análisis visual

Consiste en graficar la serie histórica de las descargas anuales de todas las estaciones de aforo de periodos comunes. Estos gráficos de preferencia se deben plotear en el mismo eje de coordenadas con la finalidad de visualizar el comportamiento regional. Si hay saltos, se observa valores altos o bajos por periodo, lo cual indica un comportamiento no regional.

### 2. Análisis doble masa

El análisis doble masa consiste primeramente en graficar los valores acumulados (anuales) de cada estación en el eje de la ordenada y en el eje de la abscisa el promedio de los valores acumulados de las estaciones en estudio (estaciones vecinas). En este gráfico se identifica la estación modelo o la estación confiable, aquella que presenta menor número de quiebres. Luego se grafica los valores acumulados de las estaciones en estudio en el eje de la ordenada y los valores acumulados de estación modelo en el eje de la abscisa. Si hay salto en una estación, en este gráfico se presentan quiebres y permite definir periodos dudosos. El análisis doble masa permite definir periodos dudosos, pero no se puede hacer corrección o eliminación de saltos.

### 3. Análisis estadístico

Después del análisis visual y de doble masa donde se ha observado posible salto y también se han definido periodos dudosos y confiables, se pasa a la prueba estadística. Para la prueba de saltos en la media de la serie anual  $y_t$ ,  $t = 1, \dots, N$ , es no correlacionada y está normalmente distribuida con media  $\mu$  y desviación estándar  $\sigma$ ;  $N$  es el tamaño de la muestra. Las series se dividen en dos subseries de tamaños  $N_1$  y  $N_2$ , la primera subserie  $y_t$ ,  $t = 1, \dots, N_1$  tiene media  $\mu_1$  y desviación estándar  $\sigma_1$  y la segunda subserie  $y_t$ ,  $t = N_1 + 1, N_1 + 2, \dots, N$ , tiene media  $\mu_2$  y desviación estándar  $\sigma_2$ . La prueba de  $t$  de student puede ser usada para la prueba de hipótesis  $\mu_1 = \mu_2$  cuando las dos subseries tienen desviación estándar  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ . El rechazo de la hipótesis puede ser considerado como una identificación de un salto. El test estadístico para la prueba de salto en medias está dado por las siguientes ecuaciones 67 y 68 (Maidmend 1993):

$$T_c = \frac{|\bar{y}_2 - \bar{y}_1|}{s \sqrt{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}}} \quad (67)$$

$$s = \sqrt{\frac{(N_1-1)s_1^2 + (N_2-2)s_2^2}{N-2}} \quad (68)$$

Donde:

$\bar{y}_1$  y  $\bar{y}_2$  = medias muestrales de las subseries respectivamente

$s_1^2$  y  $s_2^2$  = variancias muestrales de las subseries de tiempo

La hipótesis  $\mu_1 = \mu_2$  es rechazada si  $|T_c| > T_{1-\alpha/2,v}$ , donde  $T_{1-\alpha/2,v}$  es el valor de t tabular correspondiente de la distribución de t de student con un nivel de significación  $\alpha$  y  $v = N_1 + N_2 - 2 = N - 2$ , grados de libertad. En este caso existe salto y es necesaria la corrección.

La hipótesis  $\mu_1 = \mu_2$  es aceptada si  $|T_c| \leq T_{1-\alpha/2,v}$ , donde  $T_{1-\alpha/2,v}$  es el valor de t tabular correspondiente de la distribución de t de student con un nivel de significación  $\alpha$  y  $v = N_1 + N_2 - 2 = N - 2$ , grados de libertad. En este caso no existe salto y no es necesaria la corrección.

#### 4. Corrección y/ o eliminación de saltos

Cuando las medias de los periodos en estudio son diferentes estadísticamente entonces se hace la corrección mediante las siguientes ecuaciones 69 y 70 (Villón 2002):

$$x'_t = \frac{x_t - \bar{x}_1}{s_1} s_2 + \bar{x}_2 \quad (69)$$

$$x'_t = \frac{x_t - \bar{x}_2}{s_2} s_1 + \bar{x}_1 \quad (70)$$

Donde:

$x'_t$  = valor corregido de saltos

$x_t$  = valor a ser corregido

Los demás términos ya han sido definidos. La ecuación (69) se usa cuando se debe corregir los valores de la submuestra de tamaño  $N_1$ , y la ecuación (70) se utiliza cuando se va a corregir la submuestra de tamaño  $N_2$ .

#### 5. Verificación de la bondad de la información corregida

Para verificar la bondad de la información corregida, se efectúan los análisis de saltos en la media entre el periodo de información corregida y el periodo de información confiable aplicando la prueba estadística de t de Student, donde los parámetros deben ser estadísticamente iguales, si la corrección está bien ejecutada.

## ii. Análisis de tendencia

El análisis de tendencia se realiza en una serie de tiempo hidrológico libre de saltos.

El análisis de tendencia se ejecuta mediante los siguientes pasos: análisis visual y el análisis estadístico, corrección de la tendencia y verificación de la información corregida.

Para identificar y estimar la existencia de tendencias lineales se realiza en series de tiempo hidrológico anual, donde se tiene  $y_t, t = 1, \dots, N$  donde N es el tamaño de la muestra. Una tendencia lineal puede ser expresada mediante la siguiente ecuación (Villón 2002):

$$T_m = a + bt \quad (71)$$

Donde:

a y b son los parámetros del modelo de regresión.

Estadísticamente la tendencia se mide con el coeficiente de correlación (r). Las pruebas de hipótesis son:

$$H_0: \rho = 0 \quad (72)$$

$$H_a: \rho \neq 0 \quad (73)$$

Para esta prueba de hipótesis se calcula el coeficiente de correlación ( $r_c$ ) y el coeficiente de correlación tabular ( $r_t$ ). El ( $r_t$ ) se halla para  $\alpha = 0.05$  y grados de libertad igual a número de pares correlacionados menos 2 ( $G:L = N-2$ )

$$\text{Si } |r_c| \leq r_t(95\%) \Rightarrow r \text{ no es significativo} \quad (74)$$

$$\text{Si } |r_c| > r_t(95\%) \Rightarrow r \text{ es significativo} \quad (75)$$

Si sucede la ecuación (74) no hay tendencia, por lo tanto no se corrige la información; si ocurre la ecuación (75) hay tendencia, por lo tanto se debe corregir la tendencia.

La corrección de la tendencia lineal se realiza mediante la expresión (76) (Villón 2002).

$$x'_t = x_t - T_m + \bar{x}_t \quad (76)$$

Donde:

$x_t$  = valor a ser corregido

$x'_t$  = valor corregido de tendencia

$\bar{x}_t$  = media de la serie histórica

$T_m$  = tendencia en la media (ver ecuación 71)

Para verificar la bondad de la información corregida, se debe realizar el análisis de correlación de la serie corregida y debe resultar una correlación no significativa a un nivel de significación  $\alpha = 0.05$ .

## b. Completación y extensión de datos

La completación de datos es el mecanismo que permite llenar los datos faltantes de un registro de datos. La extensión de datos es el mecanismo de transferencia de datos desde una estación con registro histórico largo a otra estación de registro histórico corto. Este procedimiento permite tener series completas, confiables y de un periodo uniforme.

Los métodos para la completación son:

- Correlación cruzada sin desfase en el tiempo: se correlacionan registros de dos estaciones por ejemplo datos de enero de la estación A con datos del mes de enero de la estación B. También se llama correlación espacial.
- Correlación cruzada con desfase: se correlacionan registros de dos estaciones (correlación espacial) y de tiempos diferentes (correlación temporal). Por ejemplo, se puede correlacionar registros del mes de enero de la estación A, con los registros del mes de febrero de la estación B.
- Autocorrelación: llamada también correlación serial, en la que se correlaciona datos de la misma estación desfasada en el tiempo, como por ejemplo se puede correlacionar datos anuales desfasando 1, 2, 3, etc., años.
- Criterios prácticos: Los criterios prácticos dependen de la experiencia del investigador; por ejemplo si falta un dato mensual se puede rellenar considerando como promedio de los meses anterior y posterior del mismo año o también se puede completar considerando como promedio de los datos de los años anterior y posterior del mes que se quiere completar.

La metodología recomendada para la completación y extensión de datos es:

1. Obtener la serie de datos de tamaño  $N_1$  a completar o a extender como se indica en la figura 12. Los datos son  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{N_1}$
2. Seleccionar la estación que tenga correlación significativa con la estación de serie  $N_1$ , y la longitud de registro sea mayor a  $N_1$ . Los datos son:  $x, x_2, x_3, \dots, x_{N_1}, x_{N_1+1}, \dots, x_{N_1+N_2}$ . La serie se muestra en la figura 12.

$y_t$  = serie de registro corto

$x_t$  = serie de registro largo

$N_1$  = tamaño de registro común a ambas series

$N_2$  = tamaño de registro no común

$N = N_1 + N_2$  = tamaño de registro largo

3. Seleccionar el modelo de correlación, que puede ser lineal, exponencial, potencial, etc. Por ejemplo si es lineal la ecuación de regresión es:

$$y_t = a + bx \quad (77)$$

4. Estimar los parámetros del modelo (a, b, r)
5. Verificar si la correlación es significativa o no con las ecuaciones del (74) y (75):

Para esta prueba de hipótesis se calcula el coeficiente de correlación ( $r_c$ ) y el coeficiente de correlación tabular ( $r_t$ ).

En este caso se busca que sea significativo el coeficiente de correlación r.

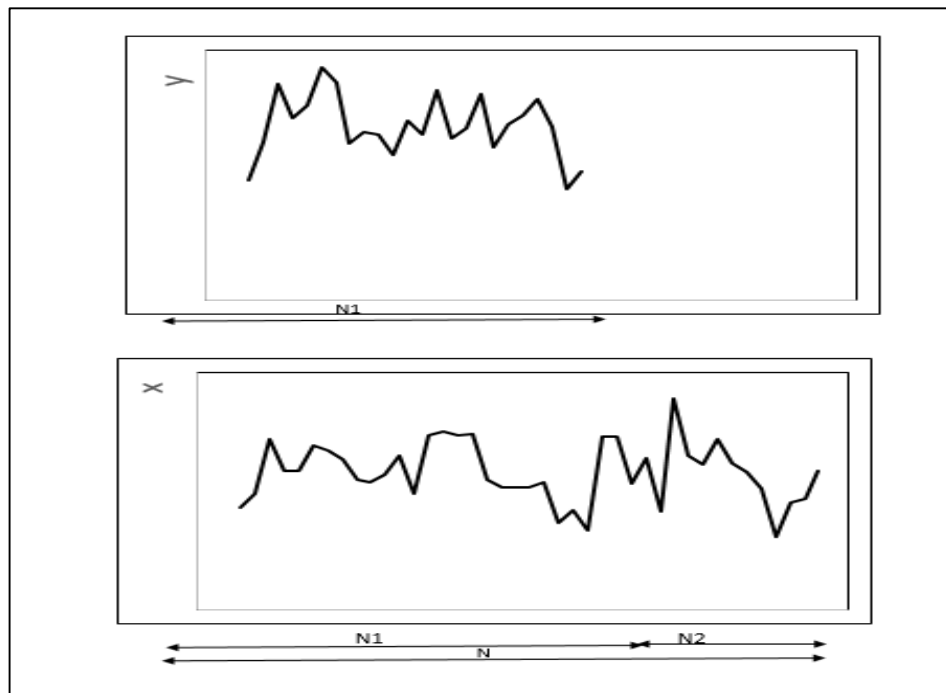


Figura 12: Series hidrológicas a extender

6. Para mejorar la información a la ecuación (77) se le agrega la componente aleatoria  $\varepsilon_t$ , multiplicada por un factor, obteniéndose la ecuación (78) que es usada para la completación y extensión de datos (Villón 2002).

$$y_t = a + bx + \alpha\theta\sqrt{1 - r^2} S_{1(y)}\varepsilon_t \quad (78)$$

Donde:

a, b = parámetros de regresión

$S_{1(y)}$  = desviación estándar de registro corto

r = coeficiente de correlación

$\varepsilon_t$  = variable aleatoria normal e independiente con media cero y varianza unitaria

$\theta = 0$  en completación, por tanto el ruido blanco  $\varepsilon_t$  no es considerado.

$$\alpha = \frac{N_2(N_1-4)(N_1-1)}{(N_2-1)(N_1-3)(N_1-2)} \quad (79)$$

7. La ecuación (78) se usa si el coeficiente de correlación  $r$  es significativa.

### 3.2.3 PRUEBA DE ESTACIONARIDAD

La estacionaridad o no estacionaridad de la serie hidrológica es realizada mediante la prueba de raíces unitarias. La prueba de raíces unitarias es ejecutada usando criterios indicados en 2.3.2, iii.

### 3.2.4 IDENTIFICACIÓN DE LOS POSIBLES MODELOS ESTOCÁSTICOS

Teniendo las series hidrológicas consistentes, completas, suficientes (extendidas) y estacionarias, el siguiente paso es buscar el o los modelos adecuados para series hidrológicas.

Los modelos usados frecuentemente en la modelación de las series hidrológicas no periódicas son: modelos autorregresivos de orden  $p$  simbolizados como modelos AR ( $p$ ), modelos de medias móviles de orden  $q$  simbolizados como modelos MA ( $q$ ) y los modelos autorregresivos y media móvil de orden  $p$  y  $q$  simbolizados como modelos ARMA ( $p,q$ ).

Los modelos usados frecuentemente en la modelación de las series hidrológicas periódicas o estacionales son: modelos autorregresivos periódicos de orden  $p$  simbolizados como modelos PAR ( $p$ ) y modelos autorregresivos periódicos y de media móvil de orden  $p$  y  $q$  simbolizados como modelos PARMA ( $p,q$ ).

La primera etapa en la identificación del tipo de modelo, consiste en determinar si los posibles modelos son AR ( $p$ ), ARMA ( $p,q$ ), PAR( $p,q$ ) o PARMA( $p,q$ ). El tipo de modelo se define según el comportamiento de los correlogramas, mediante las funciones de autocorrelación (FAC) y las funciones de autocorrelación parcial (FACP). El modelo se identifica comparando los correlogramas obtenidos con las indicaciones recomendadas en el cuadro 2.

Después de identificar el posible modelo estocástico adecuado se determina el orden del modelo que consiste en identificar los valores de  $p$  y  $q$ . En esta etapa se puede identificar más de un modelo. Identificar los modelos significa determinar varios modelos que permitan describir el comportamiento temporal de la serie hidrológica.



### **3.2.5 ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE LOS MODELOS ESTOCÁSTICOS IDENTIFICADOS**

Después de identificar el tipo de modelo estocástico y los órdenes de dichos modelos, se estima los parámetros de estos modelos. Los parámetros de los modelos se estiman con las ecuaciones dadas en el cuadro 5 y 6. Los parámetros a estimar son  $\phi(\emptyset)$  y zeta ( $\theta$ ) y la variancia del ruido blanco ( $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ ).

Las ecuaciones para la estimación de los parámetros de los diferentes modelos se demuestran en el Anexos 4, 5 y 6.

### **3.2.6 VALIDACIÓN ESTADÍSTICA O SELECCIÓN DEL MODELO ADECUADO**

Teniendo identificados los tipos y órdenes de los modelos estocásticos, con sus parámetros estimados, la siguiente etapa es la validación estadística o selección del modelo adecuado con los test estadísticos de criterio de información Schwarz modificado (SIC). Dada ecuación (44)  $SIC(p, q) = N \ln(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) + N + (p + q) \ln(N)$ , se elige como modelo adecuado aquel que tenga menor de SIC.

Los valores de la ecuación (44), están en función de la variancia del ruido blanco ( $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ ), número de datos (N) y del orden del modelo (p,q). Las ecuaciones que permiten hallar el valor de la variancia del ruido blanco ( $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ ) se muestra en el cuadro 6.

### **3.2.7 EVALUACIÓN DEL MODELO SELECCIONADO Y PREDICCIÓN**

#### **a. Evaluación del modelo seleccionado**

Para verificar si el modelo seleccionado en el paso anterior es adecuado se debe analizar los residuos. Si el modelo seleccionado captura adecuadamente la dinámica de la variable, los errores deberían ser ruidos blancos y para comprobar que las hipótesis básicas realizadas a los residuos son ciertas, los residuos deben tener: (1) media marginal igual a cero; (2) variancia marginal constante; (3) no debe existir correlación para cualquier retardo y (4) los residuos deben tener distribución normal.

Los residuos se calculan comparando los valores observados y los valores proyectados obtenidas con las ecuaciones del modelo ARMA(p,q) o con los modelos PARMA (p,q). Los valores estimados de los modelos se obtienen reemplazando los parámetros de los modelos estocásticos en las ecuaciones respectivas.

Los contrastes estadísticos para la evaluación del ruido blanco son:

1. Para comprobar si la media es cero se debe cumplir:

$$|t| = \left| \sqrt{T} \frac{\hat{a}}{\sqrt{c_0(\hat{a})}} \right| \leq 1.96, \text{ el estadístico } t \text{ se calcula con la ecuación (45).}$$

2. Para comprobar la ausencia de correlación serial, se debe cumplir:

$$Q^*(M) = T^*(T^* + 2) \frac{\sum_{k=1}^M \hat{\rho}_k^2(a)}{T^* - k} < \chi_{0.05}^2(M - p - q)$$

$Q^*(M)$  se calcula con la ecuación (46).

3. Para comprobar la normalidad se debe cumplir:

$$|g_c| \leq g_t = z_{1-\alpha/2} \sqrt{6/N}$$

En la evaluación de los residuos deben cumplirse las tres pruebas, si en caso de que no se cumpliera con estos tres contrastes se debe buscar otro modelo.

#### **b. Predicción con el modelo seleccionado**

Después de validar el tipo y orden del modelo se genera la serie histórica, reemplazando los parámetros estimados y la variable aleatoria que tenga las propiedades de ruido blanco, es decir, estas variables aleatorias deben tener media igual a cero y la variancia del error debe ser constante; esta varianza se calcula para cada estación de aforo, ya sea para datos anuales como mensuales.

Las ecuaciones de los modelos estocásticos como ARMA(p,q) o PARMA(p,q) están descritas por los parámetros  $\phi$  o zeta  $\theta$  y la variable aleatoria  $\varepsilon_t$  (ver el cuadro 5).

Para generar la variable aleatoria es necesario estimar la variancia del error  $\sigma_\varepsilon^2$ , que se calcula con las ecuaciones dadas en el cuadro 6.

#### **i Estimación de parámetros $\mu$ ( $\mu$ ), $\phi$ ( $\phi$ ) y zeta ( $\theta$ )**

Los parámetros  $\mu$   $\phi$  ( $\phi$ ) o zeta ( $\theta$ ), se estima con las ecuaciones según el modelo validado en el paso anterior. En el cuadro 5 se presentan las ecuaciones para estimar estos parámetros, el parámetro  $\mu$  es la media aritmética de los datos históricos anual o mensual.

#### **ii Verificación de la estacionaridad de los modelos seleccionados**

La estacionaridad de los modelos seleccionados se verifica hallando las raíces de las ecuaciones características (ecuación en función del operador de retardos), en la cual deben ser mayores que uno. Esta verificación se realiza usando las ecuaciones que se indican en el anexo 7, donde se indica que las raíces están en función de los parámetros  $\phi$  ( $\phi$ ) o zeta ( $\theta$ ).

Cuadro 5: Parámetros de los modelos estocásticos

MODELO	ECUACIÓN DEL MODELO	ECUACIÓN	ECUACIÓN DEL PARÁMETRO	ECUACIÓN
AR(1)	$y_t = \mu + \phi_1(y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$	16	$\gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2}$	17 ANEXO 4
			$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 \Rightarrow \rho_1 = \phi_1$	18 ANEXO 4
AR(2)	$y_t = \mu + \phi_1(y_{t-1} - \mu) + \phi_2(y_{t-2} - \mu) + \varepsilon_t$	19	$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}$	21 ANEXO 4
			$\rho_2 = \phi_2 + \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2}$	22 ANEXO 4
			$\gamma_0 = \frac{(1 - \phi_2)\sigma_\varepsilon^2}{(1 + \phi_2)[(1 - \phi_2)^2 - \phi_1^2]}$	4.42 ANEXO 4
AR(P)	$y_t = \mu + \sum_{j=1}^p \phi_j(y_{t-j} - \mu) + \varepsilon_t$	13	$\gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \sum_{j=1}^p \phi_j \rho_j}$	23 ANEXO 4
			$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p}$	24 ANEXO 4
MA(1)	$Y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$	26	$\hat{\theta}_1 = -\frac{1}{\hat{\theta}_1} - \frac{1}{r_1}$	27 ANEXO 5
			$\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2(1 + \theta_1^2)$	5.5 ANEXO 5
MA(2)	$Y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}$	28	$r_1 - 2\left(r_1 - \frac{r_1}{r_2}\right)\hat{\theta}_2 + \left[2r_1 + r_1\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - 2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)\right]\hat{\theta}_2^2 + \left(-2r_1 + \frac{r_1}{r_2}\right)\hat{\theta}_2^3 + r_1\hat{\theta}_2^4 = 0$	29 ANEXO 5
			$\hat{\theta}_1 = \frac{r_1 \hat{\theta}_2}{r_2 - \hat{\theta}_2}$	30 ANEXO 5
			$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma_\varepsilon^2$	5.10 ANEXO 5

Continuación del cuadro 5

MODELO	ECUACIÓN DEL MODELO	ECUACIÓN	ECUACIÓN DEL PARÁMETRO	ECUACIÓN
MA(q)	$Y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$	25	$\gamma_0 = s^2 = \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2 \sigma_\varepsilon^2 + \dots + \theta_q^2 \sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 \dots + \theta_q^2)$	31 ANEXO 5
			$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2} & \text{para } k = 1, \dots, q \\ 0 & k > 0 \end{cases}$	32 ANEXO 5
ARMA(1,1)	$y_t = \mu + \phi_1 (y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$	42	$\phi_1 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \Rightarrow \hat{\phi}_1 = \frac{r_2}{r_1}$	35 ANEXO 6
			$\hat{\theta}_1 = \hat{\phi}_1 + \frac{1 - \hat{\phi}_1 r_1}{\hat{\phi}_1 - r_1} - \frac{1}{\hat{\theta}_1}$	39 ANEXO 6
			$\gamma_0 = \frac{(1 - 2\phi_1\theta_1 + \theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2}$	6.6 ANEXO 6
PAR(1)	$y_{v,\tau} = \mu_\tau + \phi_{1,\tau}(y_{v,\tau-1} - \mu_{\tau-1}) + \varepsilon_{v,\tau}$	58	$\hat{\mu}_\tau = \bar{y}_\tau$	59 Maidment (1993)
			$\hat{\phi}_{1,\tau} = \left(\frac{s_\tau}{s_{\tau-1}}\right) r_{1,\tau}$	60 Maidment (1993)
			$\hat{\sigma}_\tau^2(\varepsilon) = s_\tau^2 - s_{\tau-1}^2 \phi_{1,\tau}^2$	61 Maidment (1993)
PARMA(1,1)	$y_{v,\tau} = \phi_{1,\tau} y_{v,\tau-1} + \varepsilon_{v,\tau} - \theta_{1,\tau} \varepsilon_{v,\tau-q}$	62	$\hat{\theta}_{1,\tau} = \hat{\phi}_{1,\tau} + \frac{(s_\tau^2 - \hat{\phi}_{1,\tau} c_{1,\tau})}{(\hat{\phi}_{1,\tau} s_{\tau-1}^2 - c_{1,\tau})} - \frac{(\hat{\phi}_{1,\tau+1} s_\tau^2 - c_{1,\tau+1})}{(\hat{\phi}_{1,\tau} s_{\tau-1}^2 - c_{1,\tau})} \hat{\theta}_{1,\tau+1}$	64 Maidment (1993)
			$\hat{\sigma}_\tau^2(\varepsilon) = \frac{\hat{\phi}_{1,\tau} s_{\tau-1}^2 - c_{1,\tau+1}}{\hat{\theta}_{1,\tau+1}}$	65 Maidment (1993)
			$c_{k,\tau} = \frac{1}{N} \sum_{v=1}^N (y_{v,\tau} - \bar{y}_\tau)(y_{v,\tau-k} - \bar{y}_{\tau-k})$	66 Maidment (1993)

$\gamma_0$  = Varianza,  $\rho = r$  = coeficiente de autocorrelación,  $\phi =$  Phi,  $\theta =$  Zeta,  $\varepsilon_t$  = variable aleatoria de distribución con media cero y variancia constante.  $\gamma$  = coeficiente de autocorrelación.  $\bar{y}_\tau$  = media periódica (mensual),  $s_\tau$  = desviación estándar periódica (mensual),  $r_{1,\tau}$  = coeficiente de correlación con retardo 1 (por ejemplo mes 3 con el mes cuatro cuando  $\tau = 4$  que es el cuarto mes),  $(\hat{\sigma}_\varepsilon^2)$  = variancia del ruido blanco

Cuadro 6: Ecuaciones para hallar la variancia del ruido blanco ( $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ )

MODELO	( $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ )
AR(1)	$\sigma_\varepsilon^2 = \gamma_0(1 - \phi_1^2)$
AR(2)	$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\gamma_0(1 + \phi_2)[(1 - \phi_2)^2 - \phi_1^2]}{(1 - \phi_2)}$
AR(P)	$\sigma_\varepsilon^2 = \gamma_0 \left( 1 - \sum_{j=1}^p \phi_j \rho_j \right)$
MA(1)	$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\gamma_0}{(1 + \theta_1^2)}$
MA(2)	$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\gamma_0}{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)}$
MA(q)	$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\gamma_0}{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 \dots + \theta_q^2)}$
ARMA(1,1)	$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{(1 - \theta_1^2)}{(1 - 2\phi_1\theta_1 + \theta_1^2)}$
PAR(1)	$\hat{\sigma}_t^2(\varepsilon) = s_t^2 - s_{t-1}^2 \theta_{1,t}^2$
PARMA(1,1)	$\hat{\sigma}_t^2(\varepsilon) = \frac{\hat{\theta}_{1,t} s_{t-1}^2 - c_{1,t+1}}{\hat{\theta}_{1,t+1}}$

### iii Generación de la variable aleatoria $\varepsilon_t$

Todas las ecuaciones del modelo estocástico tienen la componente  $\varepsilon_t$  que es la variable aleatoria que está distribuida en forma independiente a lo largo del tiempo; son variables generadas por un proceso de ruido blanco. Estos números como se ha indicado tienen media cero y variancia constante.

Con la ayuda de hoja de cálculo de software Excel se puede generar estos números, de media igual a cero y la desviación estándar constante que depende de cada estación de aforo.

### 3.2.8 VERIFICACIÓN DE LA BONDAD DE AJUSTE DEL MODELO ESTOCÁSTICO

Existen muchos métodos y criterios para verificar la bondad de ajuste del modelo. El criterio principal consiste en comparar las características estadísticas de las series generadas con las series históricas de la misma longitud. Si el modelo es adecuado las estadísticas que usualmente deben preservarse son:

- 1 La media y la desviación estándar.
- 2 La estructura de dependencia.
- 3 La distribución de probabilidades.
- 4 La persistencia de los años húmedos y años secos.

Para la verificación de la validez del modelo estocástico es necesaria la realización de pruebas estadísticas en los parámetros más importantes como la media y la desviación estándar, usando la prueba de medias y la prueba de homogeneidad de variancias entre los datos de las series históricas y de las series sintéticas generadas.

**a. Prueba de medias**

El error existente entre las estadísticas generadas con el modelo adecuado y los estadísticos históricos se realiza mediante la prueba de medias (estadístico t de student). El procedimiento de esta prueba se ha definido en el punto 3.2.2. Para realizar esta prueba se calculan la media de la serie generada  $\bar{x}_g$ , la media de la serie histórica  $\bar{x}_h$ , la desviación estándar de la serie generada  $S_g$ , la desviación estándar de la serie histórica  $S_h$ . El valor del estadístico T se calcula con la ecuación (67) y (68):

$$T_c = \frac{|\bar{x}_g - \bar{x}_h|}{s \sqrt{\frac{1}{N_g} + \frac{1}{N_h}}}, s = \sqrt{\frac{(N_g - 1)s_g^2 + (N_h - 2)s_h^2}{N - 2}}$$

La hipótesis  $\mu_g = \mu_h$  es rechazada si  $|T_c| > T_{1-\alpha/2, v}$ , donde  $T_{1-\alpha/2, v}$  es el valor de t tabular correspondiente de la distribución de t de student con un nivel de significación  $\alpha$  y  $v = N_g + N_h - 2 = N - 2$ , grados de libertad. En este caso el modelo estadístico no es adecuado, entonces se debe buscar otro tipo de modelo estocástico.

La hipótesis  $\mu_g = \mu_h$  es aceptada si  $|T_c| \leq T_{1-\alpha/2, v}$ , donde  $T_{1-\alpha/2, v}$  es el valor de t tabular correspondiente de la distribución de t de student con un nivel de significación  $\alpha$  y  $v = N_g + N_h - 2 = N - 2$ , grados de libertad. En este caso el modelo estocástico es adecuado y no es necesario buscar otro modelo.

**b. Prueba de homogeneidad de varianzas**

La prueba de homogeneidad de varianzas se realiza mediante el estadístico F, si los valores de las desviaciones estándar de la serie generada y de la serie histórica son estadísticamente iguales o diferentes, con un 5% de nivel de significación. Para realizar la prueba se calcula la varianza de la serie generada  $S_g^2$  y la varianza de la serie histórica  $S_h^2$ . El valor del estadístico F se calcula con las ecuaciones (91) y (92).

$$F_c = \frac{S_g^2}{S_h^2} \quad \text{si } S_g^2 > S_h^2 \tag{91}$$

$$F_c = \frac{S_h^2}{S_g^2} \quad \text{si } S_h^2 > S_g^2 \tag{92}$$

El valor de F tabular  $F_t$  se obtiene de las tablas de F (tablas de F de Fisher) con un nivel de significación  $\alpha = 0.05$  y grados de libertad del numerador (GLN) y grados de libertad del denominador (GLD).

$$\begin{aligned} \text{Si } S_g^2 > S_h^2 \\ GLN = N_g - 1, GLD = N_h - 1 \end{aligned} \quad (93)$$

$$\begin{aligned} \text{Si } S_h^2 > S_g^2 \\ GLN = N_h - 1, GLD = N_g - 1 \end{aligned} \quad (94)$$

Los criterios de decisión se establecen de la siguiente manera:

Si  $F_c \leq F_t$  entonces  $S_g^2 = S_h^2$  (el modelo es adecuado)

Si  $F_c > F_t$  entonces  $S_g^2 \neq S_h^2$  (el modelo no es adecuado, por tanto se debe buscar otro modelo estocástico).

#### c. Simulación de Monte Carlo

Mediante la simulación de Monte Carlo, se generan datos para un número grande de iteraciones, para visualizar el tipo de distribución de probabilidades.

Identificado el tipo de distribución, se grafica la función de densidad de probabilidades y la distribución acumulada; a partir de estos gráficos, se halla los caudales para diferentes percentiles.

#### d. Diagrama de caja

El diagrama de caja se construye con los datos generados según el modelo para un número grande de iteraciones, cada iteración genera los estadísticos como la media, desviación estándar, coeficiente de asimetría, y el valor de parámetro ( $\phi_1$ ). Luego se calcula los estadísticos de las iteraciones y se grafica el percentil con respecto a la media, para visualizar la distribución de las estadísticas generadas.

### 3.2.9 REGIONALIZACIÓN DE LOS MODELOS ESTOCÁSTICOS DE CAUDALES MEDIOS ANUALES Y MENSUALES

El tipo y orden del modelo estocástico se define siguiendo la secuencia establecida en la figura 11, la metodología se aplica para cada caso de forma independiente si se trata de caudales medios anuales (series no periódicas) o de caudales medios mensuales (series periódicas).

**a. Modelo estocástico regional para caudales medios anuales**

Después de definir el modelo adecuado que puede ser modelo estocástico autorregresivo AR(p), modelo estocástico de media móvil MA(q) o modelo estocástico autorregresivo y de media móvil ARMA (p, q), se busca un modelo regional cuyos parámetros media  $\mu$ ,  $\phi$  o zeta  $\theta$  y la variancia del  $\sigma_\varepsilon^2$  del error representen el comportamiento regional. Este modelo permitirá generar caudales medios anuales en puntos no aforados de la cuenca del río Santa.

**b. Modelo estocástico regional para caudales mensuales**

Después de definir el modelo adecuado que puede ser modelo estocástico periódico autorregresivo PAR(p), modelo estocástico periódico de media móvil PMA(q), o modelo estocástico periódico autorregresivo y de media móvil PARMA (p, q), se busca un modelo regional para cada mes, cuyos parámetros media  $\mu$ ,  $\phi$  o zeta  $\theta$  y la variancia del  $\sigma_\varepsilon^2$  del error representen el comportamiento regional. Este modelo permitirá generar caudales medios mensuales en puntos no aforados de la cuenca del río Santa.



## IV. RESULTADOS Y DISCUSIONES

Los resultados obtenidos y las interpretaciones del modelamiento estocástico aplicados a la cuenca del río Santa, se describen a continuación.

### 4.1 CONSISTENCIA DE LA INFORMACIÓN

La evaluación de la consistencia de la información, se ha efectuado mediante el análisis de saltos y tendencias.

#### 4.1.1 RESULTADOS

##### a. Salto

El análisis gráfico de las series anuales de las estaciones en estudio se muestran en las figuras 13 y 14.

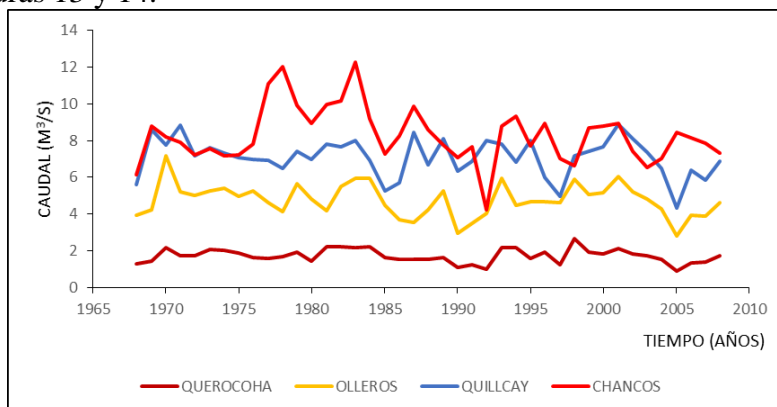


Figura 13: Caudales medios anuales de las estaciones de: Querococha, Olleros, Quillcay y Chancos

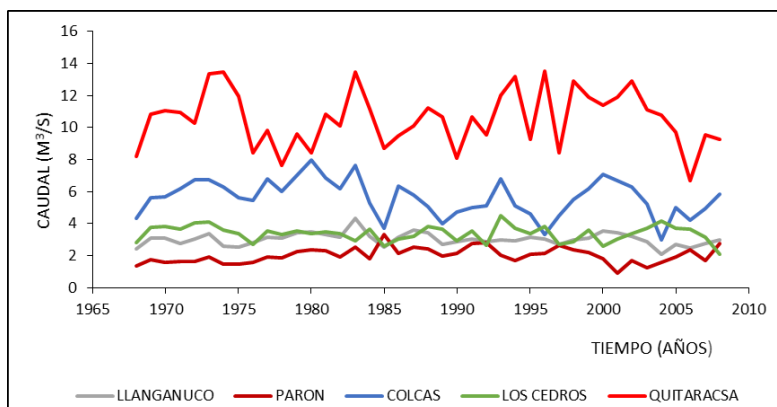


Figura 14: Caudales medios anuales de las estaciones de: Llanganuco, Parón, Colcas, Los Cedros y Quitaracsa.

El análisis de doble masa se ha realizado agrupando las estaciones en estudio en dos grupos, teniendo en cuenta la cercanía entre ellas. Los resultados se muestran en las figuras 15, 16, 17 y 18.

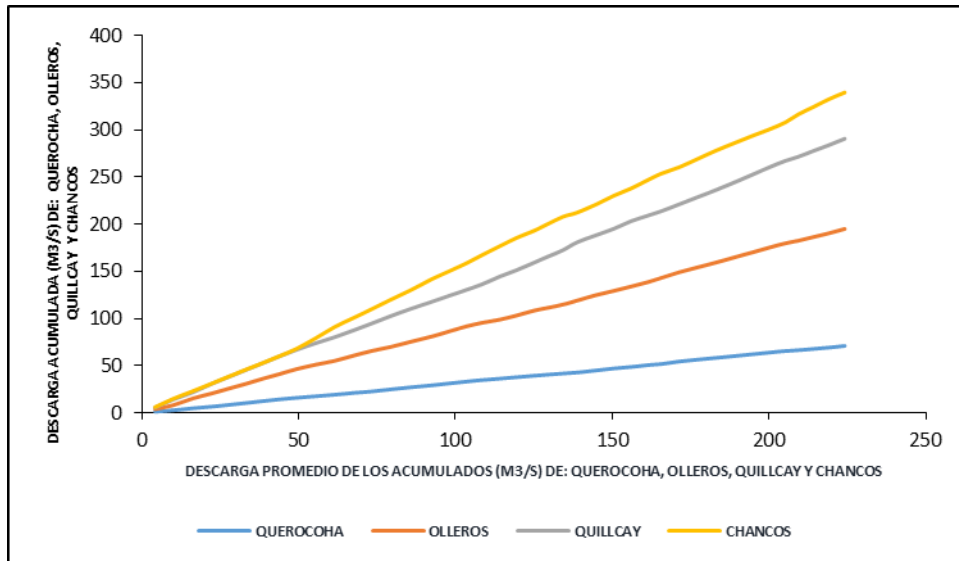


Figura 15: Análisis doble masa de las estaciones Querococha, Olleros, Quillcay y Chancos

En la figura 15 se ha graficado en el eje de la ordenada las masas acumuladas de las descargas de las estaciones de Querococha, Olleros, Quillcay y Chancos y en el eje de la abscisa se ha graficado el promedio de las masas acumuladas de las estaciones de Querococha, Olleros, Quillcay y Chancos. En esta figura se define que la estación modelo es Querococha por presentar menor número de quiebres comparada con las otras estaciones.

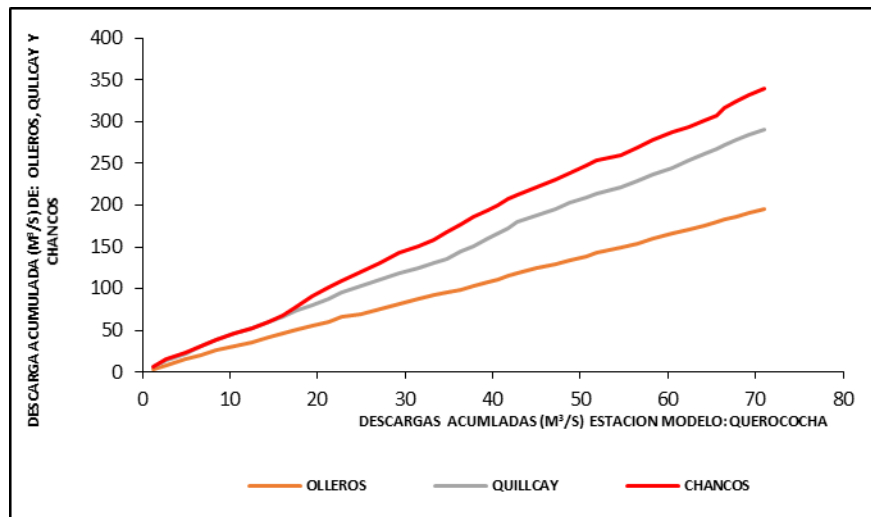


Figura 16: Análisis doble masa de las estaciones: Olleros, Quillcay y Chancos y la estación modelo Querococha.

En la figura 16 se ha graficado en el eje de la ordenada las masas de descargas acumuladas de las estaciones de: Olleros, Quillcay y Chancos y en el eje de la abscisa la masa acumulada de las descargas de la estación modelo que es Querococha.

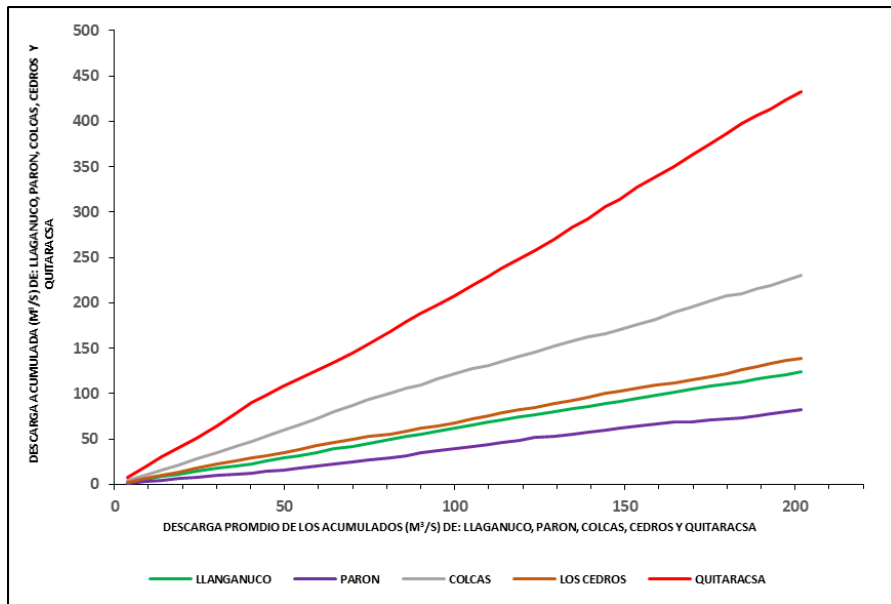


Figura 17: Análisis doble masa de las estaciones Llanganuco, Parón, Colcas, Los Cedros y Quitaracsa

En la figura 17 se ha graficado en el eje de la ordenada las masas acumuladas de las descargas de las estaciones de: Llanganuco, Parón, Colcas, Los Cedros y Quitaracsa y en el eje de la abscisa el promedio de las masas acumuladas de las estaciones de: Llanganuco, Parón, Colcas, Los Cedros y Quitaracsa. En esta figura se define que la estación modelo es Llanganuco por presentar menor número de quiebres comparada con las otras estaciones.

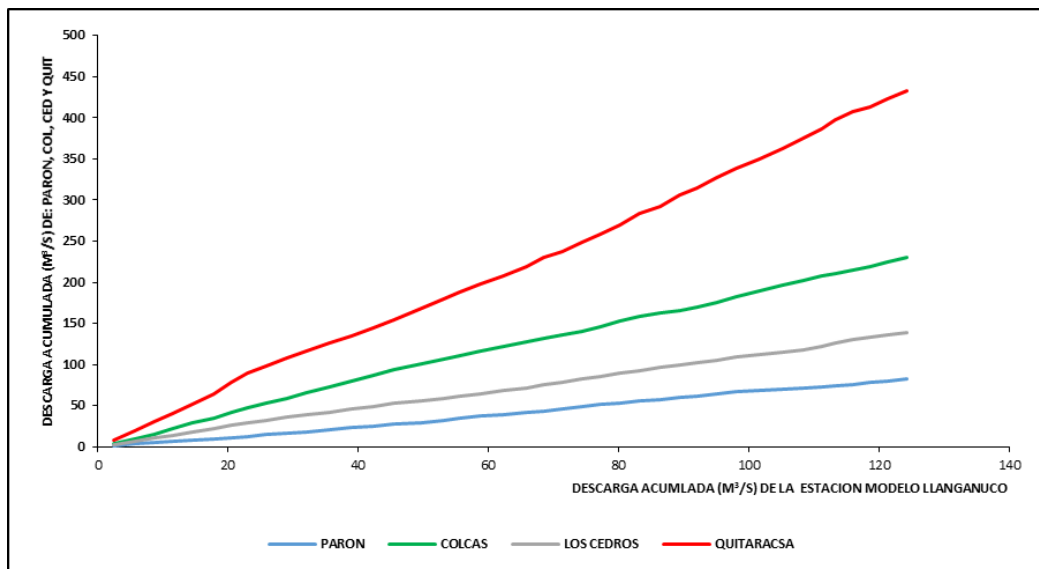


Figura 18: Análisis doble masa de las estaciones Parón, Colcas, Los Cedros y Quitaracsa y la estación modelo Llanganuco

En la figura 18, en el eje de la ordenada se ha graficado las masas de descargas acumuladas de las estaciones de: Parón, Colcas, Los Cedros, y Quitaracsa y en el eje de la abscisa la masa acumulada de las descargas de la estación modelo que es Llanganuco.

## b. Tendencia

La tendencia se ha evaluado mediante las ecuaciones (74) y (75), los resultados obtenidos se muestran en el cuadro 7. La tendencia se ha evaluado comparando el coeficiente de correlación calculado ( $r_c$ ) y coeficiente de correlación tabular ( $r_t$ ). El análisis de tendencia se ha realizado en series libres de saltos.

Cuadro 7: Resultados de la evaluación de tendencias

ESTACION	$r_c$	$ r_c $	$r_t$	$ r_c  > r_t$	¿Hay tendencia?
QUEROCOCHA	-0.14423	0.1442	0.304	NO	NO
OLLEROS	-0.23549	0.2355	0.304	NO	NO
QUILLCAY	-0.22792	0.2279	0.304	NO	NO
CHANCOS	-0.18387	0.1839	0.304	NO	NO
LLANGANUCO	-0.12503	0.1250	0.304	NO	NO
PARON	0.17092	0.1709	0.304	NO	NO
COLCAS	-0.32237	0.3224	0.304	SI	SI
LOS CEDROS	-0.17996	0.1800	0.304	NO	NO
QUITARACSA	0.00248	0.0025	0.304	NO	NO

### 4.1.2 DISCUSIÓN

De la figuras 16 y 18 se concluye que los datos de las estaciones de Querococha, Olleros, Quillcay, Chancos, Llanganuco, Parón, Colcas, Los Cedros y Quitaracsca no presentan saltos, porque el diagrama de doble masa no presenta quiebres y por lo tanto no es recomendable realizar el análisis estadístico.

En el cuadro 7 se observa que los datos de las estaciones de Querococha, Olleros, Quillcay, Chancos, Llanganuco, Parón, Los cedros y Quitaracsca no presentan tendencias. Los datos de la estación Colcas presentan tendencia; por tanto ha sido necesario corregir este error sistemático, la corrección del error sistemático se ha realizado mediante la ecuación (76). Eliminando la tendencia en la estación de la estación Colcas; el nuevo valor del coeficiente de correlación es  $r_c=0.03$  que es menor a  $r_t=0.304$ . Los datos corregidos se muestran en el anexo 1-7.

Los datos de caudales mostrados en el anexo 1, son datos consistentes, completos, de 41 años.

### 4.2 MODELAMIENTO ESTOCÁSTICO

El modelamiento estocástico se ha aplicado a las descargas de las diferentes estaciones hidrográficas de la cuenca del río Santa. Esta aplicación se ha ejecutado en dos partes: la primera parte del modelamiento se ha hecho para las series de caudales medios

anuales y la segunda parte se ha aplicado a la serie de caudales medios mensuales. En ambos casos se ha seguido la metodología establecida en la figura 11.

#### 4.2.1 MODELAMIENTO ESTOCÁSTICO DE LA SERIE DE CAUDALES PROMEDIOS ANUALES EN LA CUENCA DEL RIO SANTA

##### a. Resultados

##### 1. Prueba de estacionaridad de los caudales promedios anuales en la cuenca del río Santa

La estacionaridad de las series históricas de los caudales medios anuales se ha evaluado mediante la prueba de raíz unitaria, donde se ha comparado los valores de la ecuación (10.8) del anexo 10 y los valores de  $t_c$  dadas en las tablas de Dickey-Fuller.

El resultado obtenido de la prueba de estacionaridad se muestra en el cuadro 8.

Cuadro 8: Prueba de raíz unitaria de las descargas medias anuales

ESTACION	RIO	$\tau_\mu$	$\tau_c$	$\tau_\mu < \tau_c?$	¿SERIE ESTACIONARIA?
QUEROCOCHA	YANAYACO	-4.52	-2.96	SI	SI
OLLEROS	NEGRO	-4.39	-2.96	SI	SI
QUILCAY	QUILLCAY	-4.70	-2.96	SI	SI
CHANCOS	MARCARA	-3.72	-2.96	SI	SI
LLANGANUCO	LLANGANUCO	-4.12	-2.96	SI	SI
PARON	BUIN	-4.28	-2.96	SI	SI
COLCAS	COLCAS	-3.53	-2.96	SI	SI
LOS CEDROS	CEDROS	-6.08	-2.96	SI	SI
QUITARACSA	QUITARACSA	-5.15	-2.96	SI	SI

##### 2. Identificación de los posibles modelos estocásticos adecuados para los caudales promedios anuales en los afluentes del río Santa

La identificación de los posibles modelos autorregresivos AR(p), media móvil MA(q) y autorregresivos y de media móvil ARMA(p,q) que pueden explicar el comportamiento temporal de las descargas medias anuales en la cuenca del río Santa se ha realizado según el comportamiento del correlograma.

El comportamiento de la función de autocorrelación (FAC) y la función de autocorrelación parcial (FACP), se ha comparado con el comportamiento característico de estas funciones dadas en el cuadro 2.

Los posibles modelos estocásticos identificados para interpretar el comportamiento temporal de las descargas medias anuales de los afluentes del río Santa son ARMA (1,0),

ARMA (2, 0) y ARMA(3,0). Los resultados se muestran en el cuadro 10. Los correlogramas se muestran en el anexo 3.

### 3. Estimación de los parámetros de los modelos identificados

Las ecuaciones que permiten hallar los diferentes parámetros de los modelos estocásticos se muestran en el cuadro 5. El parámetro que sirve para seleccionar el modelo adecuado es la variancia del error; las ecuaciones para estimar este parámetro se muestran en el cuadro 6.

El parámetro variancia del error estimado mediante el software SAMS 2007 para los modelos identificados y para cada estación de aforo se muestra en el cuadro 9.

Cuadro 9: Varianza del ruido blanco o variancia del error  $\sigma_\varepsilon^2$  de las descargas medias anuales

N°	ESTACION	MODELO		
		ARMA(1,0)	ARMA(2,0)	ARMA(3,0)
1	QUEROCOCHA	0.1317	0.1305	0.1298
2	OLLEROS	0.7044	0.6974	0.6967
3	QUILLCAY	0.9746	0.9740	0.9119
4	CHANCOS	1.8663	1.8486	1.8366
5	LLANGANUCO	0.1326	0.1290	0.1259
6	PARON	0.2040	0.1841	0.1824
7	COLCAS	0.9699	0.9581	0.9550
8	LOS CEDROS	0.2453	0.2447	0.2424
9	QUITARACSA	2.9207	2.8032	2.6802

### 4. Validación estadística o selección del modelo adecuado

De los tres modelos estocásticos identificados se selecciona como modelo adecuado el modelo que tiene el menor valor SIC (criterio de información de Schwarz modificado), calculado con la ecuación 44. Los resultados se muestran en el cuadro 10.

### 5. Evaluación del modelo seleccionado

Para verificar si el modelo seleccionado es adecuado para interpretar el comportamiento de los caudales medios anuales en los afluentes del río Santa, se ha evaluado el comportamiento de los residuos del modelo ARMA (1,0). Los residuos se calculan con la ecuación (95).

$$\varepsilon_t = y_t - \mu - \phi_1(y_{t-1} - \mu) \quad (95)$$

Los parámetros  $\mu$  y  $\phi_1$  de la ecuación 95 se han obtenido con las ecuaciones indicadas en el cuadro 5 y aplicando SAMS se ha encontrado los resultados que se indican en el cuadro 11.

Cuadro 10: Validación estadística o selección del modelo estocástico adecuado para los caudales medios anuales de los afluentes del río Santa

N°	ESTACION	MODELO	SIC	¿SELECCIONADO O NO EL MODELO?
1	QUEROCOCHA	ARMA(1,0)	-38.392	SELECCIONADO
		ARMA(2,0)	-35.051	NO SELECCIONADO
		ARMA(3,0)	-31.571	NO SELECCIONADO
2	OLLEROS	ARMA(1,0)	30.346	SELECCIONADO
		ARMA(2,0)	33.649	NO SELECCIONADO
		ARMA(3,0)	37.324	NO SELECCIONADO
3	QUILLCAY	ARMA(1,0)	43.658	SELECCIONADO
		ARMA(2,0)	47.346	NO SELECCIONADO
		ARMA(3,0)	48.361	NO SELECCIONADO
4	CHANCOS	ARMA(1,0)	70.296	SELECCIONADO
		ARMA(2,0)	73.618	NO SELECCIONADO
		ARMA(3,0)	77.066	NO SELECCIONADO
5	LLANGANUCO	ARMA(1,0)	-38.125	SELECCIONADO
		ARMA(2,0)	-35.529	NO SELECCIONADO
		ARMA(3,0)	-32.818	NO SELECCIONADO
6	PARON	ARMA(1,0)	-20.469	NO SELECCIONADO
		ARMA(2,0)	-20.958	SELECCIONADO
		ARMA(3,0)	-17.616	NO SELECCIONADO
7	COLCAS	ARMA(1,0)	43.459	SELECCIONADO
		ARMA(2,0)	46.671	NO SELECCIONADO
		ARMA(3,0)	50.255	NO SELECCIONADO
8	LOS CEDROS	ARMA(1,0)	-12.905	SELECCIONADO
		ARMA(2,0)	-9.285	NO SELECCIONADO
		ARMA(3,0)	-5.966	NO SELECCIONADO
9	QUITARACSA	ARMA(1,0)	88.659	SELECCIONADO
		ARMA(2,0)	90.688	NO SELECCIONADO
		ARMA(3,0)	92.563	NO SELECCIONADO
			ARMA(1,0)	8
			ARMA(2,0)	1
			ARMA(3,0)	0

Cuadro 11: Parámetros media ( $\mu$ ), fi ( $\phi_1$ ) y varianza ( $\gamma_0$ ) de las cuencas en estudio del modelo ARMA (1,0).

N°	ESTACION	Media( $\mu$ )	VARIANZA	FI( $\phi_1$ )
1	QUEROCOCHA	1.732	0.142	0.273
2	OLLEROS	4.758	0.779	0.310
3	QUILLCAY	7.090	1.026	0.224
4	CHANCOS	8.287	2.275	0.424
5	LLANGANUCO	3.031	0.149	0.328
6	PARON	2.018	0.230	0.338
7	COLCAS	5.624	1.133	0.380
8	LOS CEDROS	3.383	0.247	0.094
9	QUITARACSA	10.547	2.992	0.154
			PROMEDIO	0.281

La evaluación de los residuos obtenidos con la ecuación (95) se muestra en el cuadro

12. Las pruebas de contraste se han realizado siguiendo los criterios establecidos en 3.2.7.a.

Cuadro 12: Pruebas de contraste de los residuos del modelo ARMA(1,0)

ESTACION	PRUEBA DE LA MEDIA				ANALISIS DE CORRELACION				ANALISIS DE NORMALIDAD			
	$ t $	$T_t$	$ t  \leq T_t$	¿MEDIA DE LOS RESIDUOS IGUAL CERO?	Q(M)	CHI CUADRADO (M-q) TABULAR $\alpha=0.05$	Q(M)B < CHI CUADRADO (M-q)	¿CORRELACION SIGNIFICATIVA?	$ g_c $	Gt	$ g_c  \leq g_t$	¿LOS RESIDUOS SE DISTRIBUYEN NORMALMENTE?
QUEROCOCHA	0.194	1.96	SI	SI	13.33	16.9	SI	NO	0.3768	0.5811	SI	SI
OLLEROS	0.142	1.96	SI	SI	12.16	16.9	SI	NO	0.3840	0.5811	SI	SI
QUILCAY	0.230	1.96	SI	SI	15.23	16.9	SI	NO	0.4352	0.5811	SI	SI
CHANCOS	0.199	1.96	SI	SI	9.02	16.9	SI	NO	0.2126	0.5811	SI	SI
LLANGANUCO	0.260	1.96	SI	SI	9.55	16.9	SI	NO	0.4510	0.5811	SI	SI
PARON	0.326	1.96	SI	SI	8.79	16.9	SI	NO	0.5171	0.5811	SI	SI
COLCAS	0.197	1.96	SI	SI	8.56	16.9	SI	NO	0.3725	0.5811	SI	SI
LOS CEDROS	0.130	1.96	SI	SI	8.72	16.9	SI	NO	0.4182	0.5811	SI	SI
QUITARACSA	0.130	1.96	SI	SI	8.72	16.9	SI	NO	0.0659	0.5811	SI	SI

## 6. Verificación de la estacionaridad del modelo seleccionado AR(1)

En el proceso de evaluación también se evalúa la estacionaridad del modelo seleccionado, mediante el análisis de las raíces de la ecuación característica que es una ecuación que está en función del operador de retardos. Estas ecuaciones se describen en el anexo 7.

Las raíces de los polinomios autorregresivos AR(1) en cada estación de aforo se muestran en el cuadro 13. Estos valores se han calculado considerando los criterios establecidos en 3.2.7.b.ii.

Cuadro 13: Raíces de los polinomios autorregresivos del modelo ARMA(1,0)

N°	ESTACION	PARAMETRO $F1(\phi_1)$	RAIZ DEL POLINOMIO $L=1/\phi_1$	$ L >1$	¿ES ESTACIONARIO EL MODELO AR(1)?
1	QUEROCOCHA	0.2730	3.66	SI	SI
2	OLLEROS	0.3100	3.23	SI	SI
3	QUILLCAY	0.2241	4.46	SI	SI
4	CHANCOS	0.4238	2.36	SI	SI
5	LLANGANUCO	0.3283	3.05	SI	SI
6	PARON	0.3382	2.96	SI	SI
7	COLCAS	0.3797	2.63	SI	SI
8	LOS CEDROS	0.0944	10.59	SI	SI
9	QUITARACSA	0.1543	6.48	SI	SI

## 7. Generación de caudales medios anuales con el modelo AR(1) en los afluentes del río Santa

Después de definir el modelo adecuado al modelo ARMA(1,0), se ha generado las descargas medias anuales en la cuenca del río Santa, mediante la ecuación (16), reemplazando los parámetros  $\mu$  y  $\phi_1$  del cuadro 11.



Las ecuaciones del modelo estocástico ARMA(1,0) se muestran en el cuadro 14.

Cuadro 14. Modelo estocástico ARMA (1,0) en las estaciones en estudio

N°	ESTACION	ECUACION
1	QUEROCOCHA	$Q_T = 1.259 + 0.273 Q_{T-1} + e_t$
2	OLLEROS	$Q_T = 3.283 + 0.310 Q_{T-1} + e_t$
3	QUILLCAY	$Q_T = 5.501 + 0.224 Q_{T-1} + e_t$
4	CHANCOS	$Q_T = 4.775 + 0.424 Q_{T-1} + e_t$
5	LLANGANUCO	$Q_T = 2.036 + 0.328 Q_{T-1} + e_t$
6	PARON	$Q_T = 1.336 + 0.338 Q_{T-1} + e_t$
7	COLCAS	$Q_T = 3.489 + 0.380 Q_{T-1} + e_t$
8	LOS CEDROS	$Q_T = 3.064 + 0.094 Q_{T-1} + e_t$
9	QUITARACSA	$Q_T = 8.920 + 0.154 Q_{T-1} + e_t$

La componente aleatoria  $\varepsilon_t$  se genera con la ayuda de la hoja de cálculo Excel. Esta variable tiene media igual a cero y la desviación estándar igual a la desviación estándar de error de los datos históricos de cada estación de aforo.

La serie cronológica de caudales anuales generados con las ecuaciones del cuadro 14 y caudales históricos, se muestra en el anexo 8.

## 8. Verificación de la bondad de ajuste del modelo estocástico AR (1)

Para la verificación de la bondad de ajuste del modelo ARMA (1,0) se comparan las estadísticas principales de los datos históricos y generados y también se han realizado la prueba de medias y la prueba de homogeneidad de variancias.

La media, desviación estándar, coeficiente de variación, valores mínimos y valores máximos de las series históricas y de las series generadas se muestran en el cuadro 15. La prueba de medias y prueba de homogeneidad de variancias se muestra en el cuadro 16.

## 9. Regionalización de los parámetros del modelo estocástico AR(1) en la cuenca del río Santa

Los resultados mostrados en los cuadros 15 y 16 indican que el modelo estocástico adecuado para describir las descargas medias anuales en las subcuencas del río Santa, es el modelo AR(1). Las ecuaciones del modelo en cada estación se muestran en el cuadro 14. Para tener una ecuación estocástica regional en la cuenca del río Santa se han regionalizado los parámetros media ( $\mu$ ), fi ( $\phi_1$ ) y la desviación estándar del error (Se) de los ríos en estudio.

Cuadro 15: Estadísticas de los datos históricos y generados con AR(1) en las cuencas en estudio

ESTADISTA	QUEROCOCHA		OLLEROS		QUILLCAY		CHANCOS		LLANGANUCO		PARON		COLCAS		LOS CEDROS		QUITARACSA	
	HISTORICO	GENERADO	HISTORICO	GENERADO	HISTORICO	GENERADO	HISTORICO	GENERADO	HISTORICO	GENERADO	HISTORICO	GENERADO	HISTORICO	GENERADO	HISTORICO	GENERADO	HISTORICO	GENERADO
MEDIA	1.73	1.80	4.76	4.70	7.09	7.20	8.29	8.76	3.03	3.01	2.02	1.91	5.62	5.56	3.38	3.27	10.55	10.50
DES. ESTANDAR	0.377	0.365	0.883	1.009	1.013	0.854	1.508	1.482	0.386	0.378	0.480	0.624	1.065	1.219	0.498	0.619	1.730	1.477
CV	0.218	0.203	0.186	-0.016	0.143	-0.131	0.182	-0.149	0.127	0.314	0.238	-0.233	0.189	0.260	0.147	0.515	0.164	0.208
MINIMO	0.91	0.85	2.80	2.50	4.34	5.47	4.23	4.27	4.27	2.24	0.90	0.43	3.51	2.86	2.06	2.15	6.66	7.33
MAXIMO	2.66	2.63	7.19	6.83	8.90	8.79	12.28	13.02	13.02	4.01	3.31	3.13	7.72	8.63	4.48	4.99	13.53	13.33

Cuadro 16: Prueba de medias y de homogeneidad de varianzas de las descargas medias anuales históricas y generadas con el modelo AR(1)

ESTACION	MEDIA HISTORICA	MEDIA GENERADA	Tc	Tt	!Tcl<Tt	¿MEDIA HISTORICA ES IGUAL A LA MEDIA GENERADA?	VARIANZA HISTORICA	VARIANZA GENERADA	¿VAR HISTO >VAR GENE?	Fc	Ft	Fc<Ft	¿VARIANZA HISTORICA ES IGUAL A LA VARIANZA GENERADA?
QUEROCOCHA	1.73	1.80	-0.759	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.142	0.133	NO	1.067	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
OLLEROS	7.09	7.20	0.291	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.779	1.019	SI	1.307	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
QUILLCAY	7.09	7.20	-0.502	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	1.026	0.730	NO	1.406	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
CHANCOS	8.29	8.76	-1.405	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	2.274	2.196	NO	1.036	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
LLANGANUCO	3.03	3.01	0.215	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.149	0.143	NO	1.042	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
PARON	2.02	1.91	0.854	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.230	0.390	SI	1.693	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
COLCAS	5.62	5.56	0.248	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	1.134	1.486	SI	1.310	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
LOS CEDROS	3.38	3.27	0.900	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.248	0.383	SI	1.547	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
QUITARACSA	10.55	10.50	0.136	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	2.99	2.18	NO	1.371	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
						MEDIAS IGUALES	9					MEDIAS IGUALES	9
						MEDIAS DIFERENTES	0					MEDIAS DIFERENTES	0

### 9.1 Regionalización de la descarga media anual ( $\mu$ ) en la cuenca del río Santa

Para la regionalización de la media se ha correlacionado las descargas medias anuales con el área de la cuenca (A) y el porcentaje de área glaciar (G). Los datos y resultados se muestran en el cuadro 17 y en la figura 19.

La regresión múltiple entre el caudal medio anual, el área de la cuenca y el porcentaje del área glaciar da la ecuación (96):

$$\mu_a = \bar{Q}_a = -0.3954 + 0.02745A + 0.0264G \quad (96)$$

$$r_c = 0.9912$$

$$r_t = 0.707$$

Donde:

A= área e la cuenca en Km<sup>2</sup>

$\bar{Q}_a$  = descarga media anual en m<sup>3</sup>/s

G = área glaciar en porcentaje

$r_c$  = coeficiente de correlación calculada

$r_t$  = coeficiente de correlación tabular

Cuadro 17: Descargas medias anuales generadas e históricas, el área de la cuenca y porcentaje de glaciares

CUENCA	RIO	ESTACION	AREA DE LA CUENCA (KM <sup>2</sup> )	PORCENTAJE DE AREA GLACIAR (%)	Q HISTORICO (M3/S)	QESTIMADO (M3/S) REG. MULTIPLE
SANTA	YANAYACU	QUEROCOCHA	66.00	3.18	1.73	1.501
SANTA	NEGRO	OLLEROS	176.00	16.19	4.76	4.864
SANTA	QUILLCAY	QUILLCAY	250.00	18.36	7.09	6.953
SANTA	MARCARA	CHANCOS	271.00	24.10	8.29	7.681
SANTA	LLANGANUCO	LLANGANUCO	87.00	38.74	3.03	3.016
SANTA	PARON	PARON	45.00	47.11	2.02	2.084
SANTA	COLCAS	COLCAS	236.00	16.53	5.62	6.520
SANTA	LOS CEDROS	LOS CEDROS	116.00	20.69	3.38	3.336
SANTA	QUITARACSA	QUITARACSA	390.00	7.69	10.55	10.515

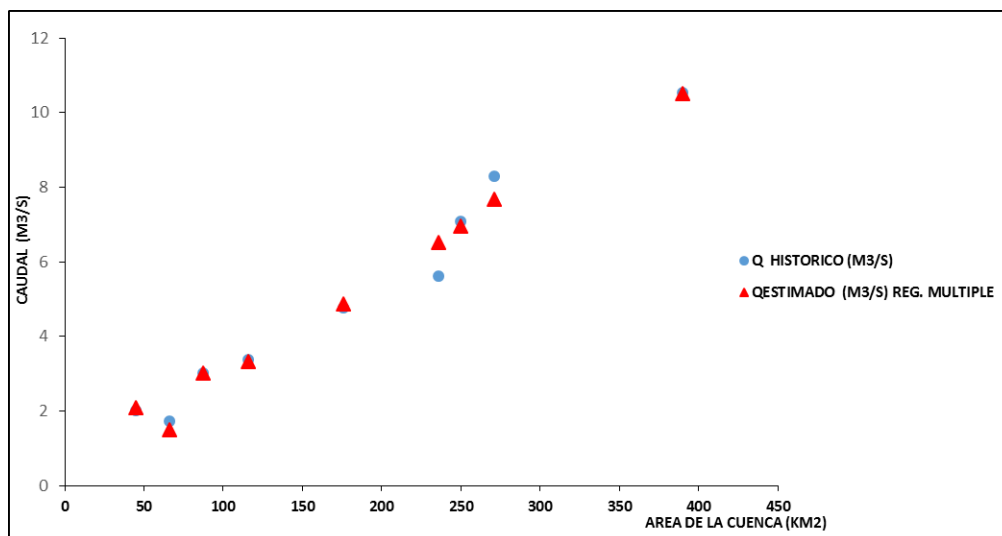


Figura 19: Correlación de las descargas medias anuales, el área de la cuenca (A) y el porcentaje de glaciares (G)

## 9.2 Regionalización del parámetro $fi (\phi_1)$ del modelo AR (1) en la cuenca del río Santa

En el cuadro 11 y en la figura 20 se muestra el parámetro  $fi (\phi_1)$  en los ríos afluentes de la cuenca del Santa, para el modelo estocástico AR(1).

El parámetro  $fi (\phi_1)$  regional en la cuenca del río Santa es 0.281, que es el promedio de  $fi (\phi_1)$  de las 9 estaciones de aforo analizadas. En el estudio de correlación de  $fi (\phi_1)$  con los parámetros físicos de la cuenca no ha encontrado correlación significativa.

## 9.3 Regionalización del parámetro desviación estándar del error ( $S_e$ ) del modelo AR(1)

La variable aleatoria  $\varepsilon_t$  del modelo regional AR(1) depende de la variancia del error  $\sigma_\varepsilon^2$ , y esta depende del área de la cuenca.

Al correlacionar la desviación estándar del error ( $S_e$ ) con el área de la cuenca, se ha encontrado la ecuación (97), los resultados obtenidos se muestra en el cuadro 18 y figura 21.

$$S_e = 0.004A + 0.1047 \quad (97)$$

$$r_c = 0.974$$

$$r_t = 0.666$$

Donde:

A= área de la cuenca en Km<sup>2</sup>

$\bar{Q}_a$  = descarga media anual en m<sup>3</sup>/s

A = área de la cuenca en Km<sup>2</sup>

$r_c$  = coeficiente de correlación calculada

$r_t$  = coeficiente de correlación tabular

Cuadro 18: Desviación estándar anual de descargas generadas e históricas y el área de la cuenca

ESTACION	AREA DE CUENCA (KM <sup>2</sup> )	VARIANZA DEL ERROR DEL MODELO AR(1)	Se (OBSERVADO)	Se (ESTIMADO)
QUEROCOCHA	66.00	0.132	0.363	0.369
OLLEROS	176.00	0.704	0.839	0.809
QUILLCAY	250.00	0.975	0.987	1.105
CHANCOS	271.00	1.866	1.366	1.189
LLANGANUCO	87.00	0.133	0.364	0.453
PARON	45.00	0.204	0.452	0.285
COLCAS	236.00	0.970	0.985	1.049
LOS CEDROS	116.00	0.245	0.495	0.569
QUITARACSA	390.00	2.921	1.709	1.665
DESVIACION ESTANDAR DEL ERROR DEL MODELO AR(1) Se (OBSERVADO)				
DESVIACION ESTANDAR DEL ERROR DEL MODELO AR(1) Se (ESTIMADO)				

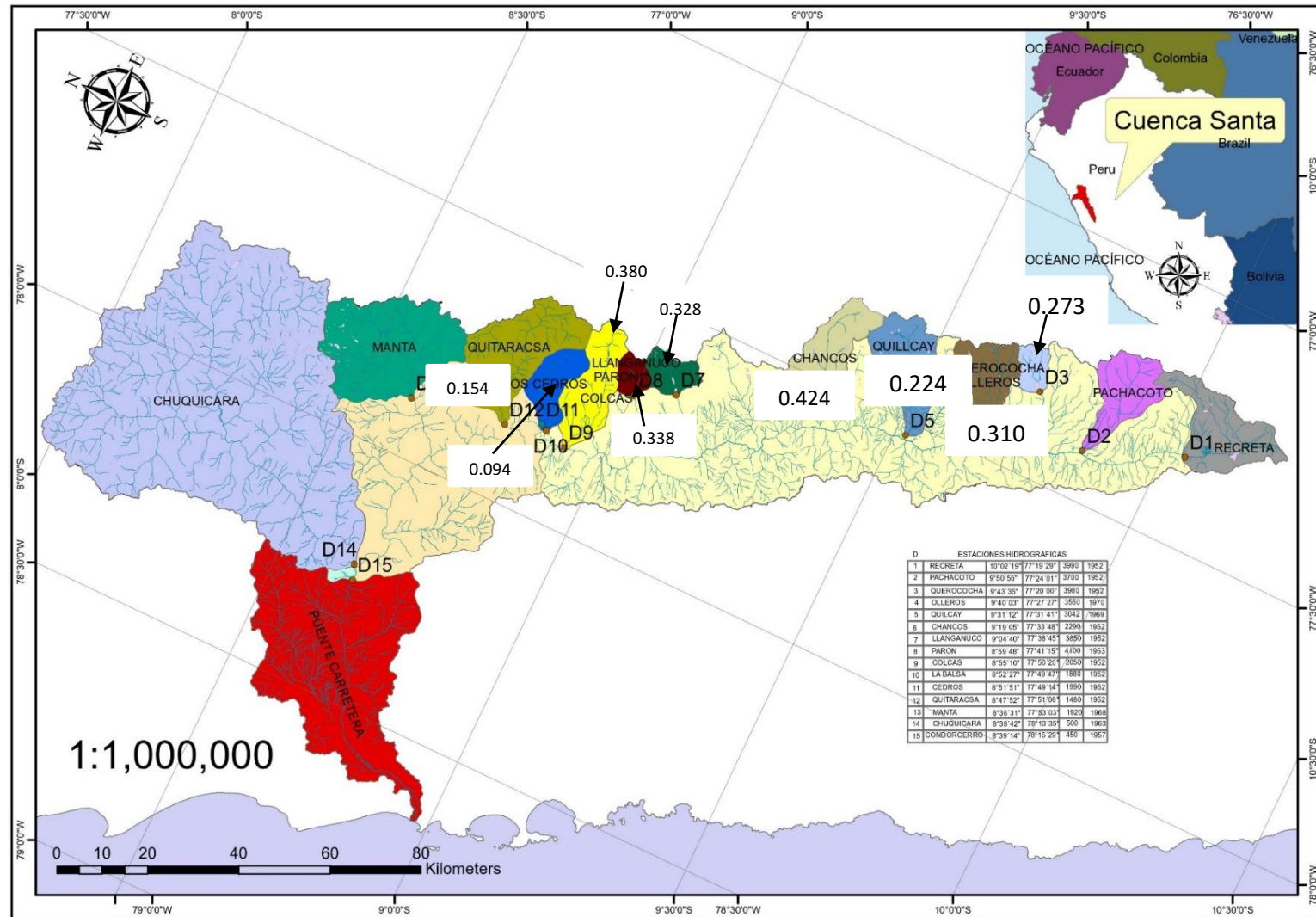


Figura 20: Mapa de ubicación del parámetro  $\phi_1$  de las 9 subcuencas en estudio (cuena del río Santa)

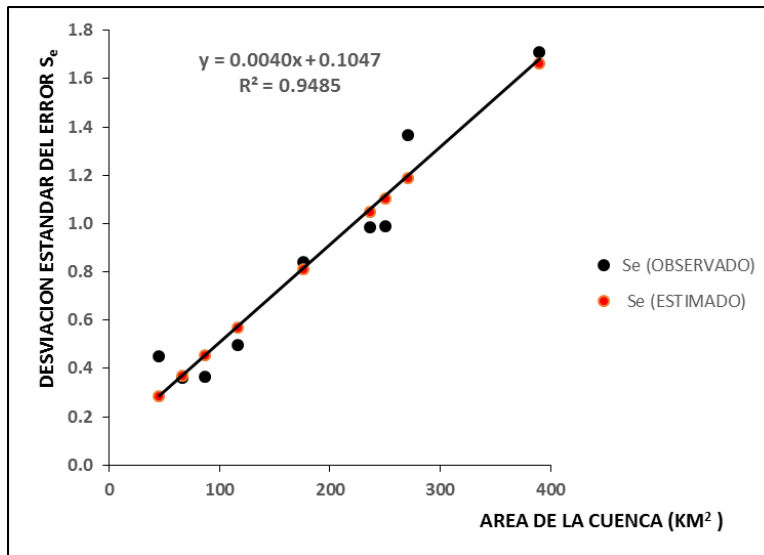


Figura 21: Correlación de la desviación estándar anual del error  $Se$  y el área de la cuenca ( $A$ ).

## 10. Modelo regional para las descargas promedios anuales de la cuenca del río Santa

El modelamiento de los caudales promedios anuales se ha ejecutado mediante el modelo estocástico AR (1). La ecuación regional de las descargas medias anuales se ha obtenido a partir de la ecuación. Reemplazando las ecuaciones regionales (96) y el valor de  $(\phi_1) = 0.281$ , en la ecuación (16) se obtiene la ecuación regional (98).

$$Q_t = -0.2843 + 0.0197A + 0.01898G + 0.281Q_{t-1} + \varepsilon_t \quad (98)$$

Donde:

$Q$ = caudal en  $m^3/s$

$t$ = tiempo en años

$A$ = área de la cuenca en  $Km^2$

$G$ = porcentaje de área glaciar

$\varepsilon_t$  = variable aleatoria con media cero con variancia constante. La desviación estándar depende del área de la cuenca (ecuación 97). Su valor se obtiene con la ayuda de Excel, introduciendo los valores de la desviación estándar para cada área de la cuenca.

## 11. Verificación de la bondad de ajuste del modelo regional AR(1)

Para evaluar la prueba de bondad de ajuste del modelo regional dada por la ecuación 98 se han generado las descargas en las subcuencas en estudio. La verificación de la bondad de ajuste se ha hecho mediante la prueba de medias y de variancias entre las descargas generadas y las descargas históricas. Los resultados se muestran en el cuadro 19.

Cuadro 19: Prueba de medias y de variancias anuales históricas y generadas (ecuación 98)

RIO	ESTACION	MEDIA HISTORICA	MEDIA GENERADA	$T_t$	$ T_c $	$T_t \leq  T_c $	VARIANCIA HISTO	VARIANCIA GENE	$F_t$	¿VAR HISTORICA > LA VARIANZA GENE?	$F_c$	¿ $F_c \leq F_t$ ?	¿VAR HISTORICA ES IGUAL VARIANZA GENE?
YANAYACU	QUEROCOCHA	1.73	1.59	1.645	1.642	MEDIAS IGUALES	0.142	0.163	1.693	NO	1.143	SI	HAY HOMOGENEIDAD
NEGRO	OLLEROS	4.76	4.68	1.645	0.405	MEDIAS IGUALES	0.779	0.778	1.693	SI	1.001	SI	HAY HOMOGENEIDAD
QUILLCAY	QUILLCAY	7.09	6.75	1.645	1.585	MEDIAS IGUALES	1.026	0.872	1.693	SI	1.176	SI	HAY HOMOGENEIDAD
MARCARA	CHANCOS	8.29	8.19	1.645	0.360	MEDIAS IGUALES	2.275	0.998	1.693	SI	2.280	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD
LLANGANUCO	LLANGANUCO	3.03	2.98	1.645	0.579	MEDIAS IGUALES	0.149	0.201	1.693	NO	1.354	SI	HAY HOMOGENEIDAD
PARON	PARON	2.02	2.13	1.645	1.326	MEDIAS IGUALES	0.230	0.052	1.693	SI	4.417	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD
COLCAS	COLCAS	5.62	6.25	1.645	2.696	MEDIAS DIFERENTES	1.263	0.964	1.693	SI	1.310	SI	HAY HOMOGENEIDAD
LOS CEDROS	LOS CEDROS	3.38	3.25	1.645	1.068	MEDIAS IGUALES	0.247	0.396	1.693	NO	1.600	SI	HAY HOMOGENEIDAD
QUITARACSA	QUITARACSA	10.55	10.48	1.645	0.174	MEDIAS IGUALES	2.992	3.110	1.693	NO	1.039	SI	HAY HOMOGENEIDAD
			ESTACIONES CON MEDIAS DIFERENTES		1					ESTACIONES CON VARIANCIAS DIFERENTES		2	
			ESTACIONES CON MEDIAS IGUALES		8					ESTACIONES CON VARIANCIAS IGUALES		7	

## **b. Discusión**

### **1 Prueba de estacionaridad de los caudales promedios anuales en la cuenca del río Santa**

Los resultados obtenidos en el cuadro 8 indican que las series de descargas medias anuales en la cuenca del río Santa son estacionarias, es decir, los datos de estas estaciones tienen a través del tiempo media constante, variancia constante, la covariancia depende sólo de retardo y no hay autocorrelación significativa. Por consiguiente las series de caudales del río Santa se pueden modelar mediante los modelos estocásticos lineales ARMA(p,q) sin realizar ninguna transformación.

### **2 Identificación de los posibles modelos estocásticos adecuados para los caudales promedios anuales en los afluentes del río Santa**

Los modelos estocásticos identificados para la serie de caudales promedios anuales son de tipo Autorregresivo, lo cual se ha definido comparando el comportamiento del correlograma observado (ver anexo 3) y el comportamiento indicado en el cuadro 2. En todas las estaciones los coeficientes de autocorrelaciones decrecen exponencialmente y los coeficientes de autocorrelaciones parciales tienen picos significativos en los rezagos p. Se ha identificado tres tipos de modelos autorregresivos AR(1), AR(2) y AR(3).

### **3 Estimación de los parámetros de los modelos identificados**

La variancia del error  $\sigma_{\varepsilon}^2$  estimado para el modelo ARMA(1,0) es mayor, en comparación con la variancia del error  $\sigma_{\varepsilon}^2$  encontrado para los modelos ARMA(2,0) y ARMA (3,0), en todas las estaciones de aforo en estudio.

Estos parámetros estimados para diferentes estaciones de aforo sirven para seleccionar el modelo adecuado.

### **4 Validación estadística o selección del modelo adecuado**

Según los resultados que se observa en el cuadro 10 se define al modelo estocástico ARMA (1,0) o el modelo autorregresivo de orden 1 AR(1) como modelo regional adecuado para la serie de caudales promedios anuales del río Santa, porque da el menor valor de SIC en 8 estaciones a excepción de la estación Parón, que da como modelo adecuado el modelo ARMA(2,0).



## **5 Evaluación del modelo seleccionado**

Las pruebas de contraste de los residuos indicados en el cuadro 12, en todas estaciones de aforo los residuos cumplen con la condición de un proceso de ruido blanco que tiene media 0, que no hay correlación y tienen una distribución normal; por lo tanto el modelo estocástico ARMA (1,0) es adecuado para explicar el comportamiento temporal de las descargas anuales en la cuenca del río Santa. Los residuos del modelo ARMA (1,0) presentan un comportamiento de ruido blanco que es una condición para definir el modelo adecuado en modelos dinámicos.

## **6 Verificación de la estacionaridad del modelo seleccionado AR(1)**

La raíces L de los polinomios autorregresivos de orden 1 AR(1) mostrados en el cuadro 13, en valor absoluto son mayores que uno, por lo tanto el modelo AR(1) es estacionario en las estaciones hidrográficas estudiadas.

## **7 Generación de caudales medios anuales con el modelo AR(1) en los afluentes del río Santa**

Las ecuaciones mostradas en el cuadro 14, son ecuaciones autorregresivas de orden 1. En el cuadro 15 y en el anexo 8 se observa la similitud que existe entre caudales históricos y caudales generados.

## **8 Verificación de la bondad de ajuste del modelo estocástico AR (1)**

La media, desviación estándar, coeficiente de variación, valores mínimos y valores máximos de las series históricas y de las series generadas con el modelo AR(1) mostradas en el cuadro 15 son valores similares, es decir, no hay error significativo. Se confirman mediante la prueba de medias y prueba de homogeneidad de variancias mostradas en el cuadro 16; por lo tanto las series generadas con el modelo AR(1) y las series históricas provienen de la misma población en cada estación de aforo.

Como las medias y las variancias de las descargas medias anuales de los datos históricos y generados son estadísticamente iguales, entonces se concluye que el modelo estocástico ARMA (1,0) es adecuado para explicar el comportamiento temporal de las descargas medias anuales en todas las cuencas en estudio.

## **9 Regionalización de los parámetros del modelo estocástico AR(1) en la cuenca del río Santa**

### **9.1 Regionalización de la descarga media anual ( $\mu$ ) en la cuenca del río Santa**

Las cuencas indicadas en el cuadro 17, son los afluentes ubicados en la Cordillera Blanca del río Santa y presentan una correlación significativa porque se tiene:  $r_c > r_t$ , por lo tanto el caudal medio anual ( $\mu$  regional) se puede estimar mediante la ecuación (96).

### **9.2 Regionalización del parámetro $fi$ ( $\phi_1$ ) del modelo AR (1) en la cuenca del río Santa**

En la regionalización del parámetro  $fi$  ( $\phi_1$ ) no se ha encontrado correlación significativa de  $fi$  ( $\phi_1$ ) con los parámetros físicos de las cuencas; por lo tanto se ha estimado para la cuenca del río Santa como promedio de los valores de  $fi$  ( $\phi_1$ ), el de: 0.281.

### **9.3 Regionalización del parámetro de la desviación estándar del error ( $S_e$ ) del modelo AR(1)**

Al correlacionar la desviación estándar del error con el área de la cuenca se ha obtenido resultados significativos porque  $r_c > r_t$ ; por lo tanto la desviación estándar del error ( $S_e$ ) regional se puede estimar mediante la ecuación (97). La correlación significativa que existe entre la desviación estándar ( $S_e$ ) y el área de la cuenca se observa en el cuadro 18 y figura 21. La desviación estándar del error sirve para calcular los valores de la variable aleatoria  $\varepsilon_t$ .

## **10 Modelo regional para las descargas promedios anuales de la cuenca del río Santa**

La correlación significativa de los parámetros del modelo estocástico AR(1), permiten definir a la ecuación regional (98) como adecuado para describir el comportamiento de los caudales promedios anuales en la cuenca del río Santa.

## **11 Verificación de la bondad de ajuste del modelo regional**

En el cuadro 19 se observa que de las 9 estaciones de aforo las medias son estadísticamente iguales en 8 estaciones y en una estación las medias son estadísticamente diferentes (Colcas). En la prueba de homogeneidad de variancias en 7 estaciones son

homogéneas las varianzas y en 2 estaciones las varianzas son no homogéneas (Chancos y Parón).

Los resultados obtenidos de la prueba de medias indican que las medias históricas y generadas (modelo AR(1)) son estadísticamente iguales en la mayoría de las estaciones, y en la prueba de homogeneidad de variancias se obtiene que las variancias de las series históricas y generadas (modelo AR(1)) son homogéneas en la mayoría de las estaciones. Por esta razón se concluye que la ecuación regional (98) es el modelo regional adecuado para estimar las descargas medias anuales en la cuenca del río Santa.

Por consiguiente en la cuenca del río Santa para generar las descargas medias anuales en cualquier punto de la cuenca, se debe conocer el área de la cuenca, porcentaje del área glaciar, y la desviación estándar de error que está en función del área de la cuenca (ecuación 97).

#### **4.2.2 MODELAMIENTO ESTOCÁSTICO DE LA SERIE DE CAUDALES MENSUALES DE LA CUENCA DEL RIO SANTA**

##### **a Resultados**

##### **1 Prueba de estacionaridad de los caudales medios mensuales en los afluentes del río Santa**

El resultado obtenido de la prueba de estacionaridad se muestra en el cuadro 20, donde se muestra los valores de  $t_c$  que es el valor de T del DicKey – Fuller aumentado y los valores de  $t_u$  que es el valor de T calculado con la ecuación (10.8) del anexo 10. En el presente trabajo la prueba de raíz unitaria se ha ejecutado utilizando el software EVIEWS versión 8.

##### **2 Identificación del modelo estocástico adecuado para los caudales mensuales en los afluentes del río Santa**

La identificación de los posibles modelos autorregresivos periódicos (estacionales) PAR(p), y modelos autorregresivos y de media móvil PARMA(p,q) que pueden explicar el comportamiento temporal de las descargas medias mensuales en la cuenca del río Santa se ha realizado según el comportamiento del correlograma.

Los posibles modelos estocásticos identificados para interpretar el comportamiento temporal de las descargas mensuales de los afluentes del río Santa son PARMA (1,0), PARMA(2, 0) y PARMA(3,0). Los resultados se muestran en el cuadro 21.

Cuadro 20: Prueba de raíz unitaria de las descargas mensuales de la cuenca del río Santa.

PRUEBA DE RAIZ UNITARIA					PRUEBA DE RAIZ UNITARIA				
ESTACION:	QUEROCOCHA				ESTACION:	CHANCOS			
MES	$\tau_{\mu}$	$\tau_c$	$\hat{\tau}_{\mu} < \tau_c?$	¿SERIE ESTACIONARIA?	MES	$\tau_{\mu}$	$\tau_c$	$\hat{\tau}_{\mu} < \tau_c?$	¿SERIE ESTACIONARIA?
ENERO	-5.587	-3.527	SI	SI	ENERO	-5.735	-3.527	SI	SI
FEBRERO	-5.929	-3.527	SI	SI	FEBRERO	-5.004	-3.527	SI	SI
MARZO	-5.919	-3.527	SI	SI	MARZO	-6.018	-3.527	SI	SI
ABRIL	-5.557	-3.527	SI	SI	ABRIL	-6.259	-3.527	SI	SI
MAYO	-5.639	-3.527	SI	SI	MAYO	-5.546	-3.527	SI	SI
JUNIO	-5.301	-3.527	SI	SI	JUNIO	-5.789	-3.527	SI	SI
JULIO	-5.357	-3.527	SI	SI	JULIO	-4.496	-3.527	SI	SI
AGOSTO	-5.369	-3.527	SI	SI	AGOSTO	-4.497	-3.527	SI	SI
SEPTIEMBRE	-6.151	-3.527	SI	SI	SEPTIEMBRE	-4.432	-3.527	SI	SI
OCTUBRE	-5.431	-3.527	SI	SI	OCTUBRE	-4.115	-3.527	SI	SI
NOVIEMBRE	-5.795	-3.527	SI	SI	NOVIEMBRE	-5.815	-3.527	SI	SI
DICIEMBRE	-5.053	-3.527	SI	SI	DICIEMBRE	-6.043	-3.527	SI	SI
PRUEBA DE RAIZ UNITARIA					PRUEBA DE RAIZ UNITARIA				
ESTACION:	OLLEROS				ESTACION:	LLANGANUCO			
MES	$\tau_{\mu}$	$\tau_c$	$\hat{\tau}_{\mu} < \tau_c?$	¿SERIE ESTACIONARIA?	MES	$\tau_{\mu}$	$\tau_c$	$\hat{\tau}_{\mu} < \tau_c?$	¿SERIE ESTACIONARIA?
ENERO	-5.652	-3.527	SI	SI	ENERO	-5.963	-3.527	SI	SI
FEBRERO	-5.406	-3.527	SI	SI	FEBRERO	-5.779	-3.527	SI	SI
MARZO	-5.036	-3.527	SI	SI	MARZO	-6.966	-3.527	SI	SI
ABRIL	-5.191	-3.527	SI	SI	ABRIL	-5.232	-3.527	SI	SI
MAYO	-4.857	-3.527	SI	SI	MAYO	-4.200	-3.527	SI	SI
JUNIO	-5.340	-3.527	SI	SI	JUNIO	-4.361	-3.527	SI	SI
JULIO	-6.008	-3.527	SI	SI	JULIO	-5.664	-3.527	SI	SI
AGOSTO	-6.721	-3.527	SI	SI	AGOSTO	-6.182	-3.527	SI	SI
SEPTIEMBRE	-4.923	-3.527	SI	SI	SEPTIEMBRE	-4.708	-3.527	SI	SI
OCTUBRE	-5.085	-3.527	SI	SI	OCTUBRE	-4.214	-3.527	SI	SI
NOVIEMBRE	-5.023	-3.527	SI	SI	NOVIEMBRE	-5.057	-3.527	SI	SI
DICIEMBRE	-5.025	-3.527	SI	SI	DICIEMBRE	-4.505	-3.527	SI	SI
PRUEBA DE RAIZ UNITARIA					PRUEBA DE RAIZ UNITARIA				
ESTACION:	QUILLCAY				ESTACION:	PARON			
MES	$\tau_{\mu}$	$\tau_c$	$\hat{\tau}_{\mu} < \tau_c?$	¿SERIE ESTACIONARIA?	MES	$\tau_{\mu}$	$\tau_c$	$\hat{\tau}_{\mu} < \tau_c?$	¿SERIE ESTACIONARIA?
ENERO	-4.958	-3.527	SI	SI	ENERO	-5.389	-3.527	SI	SI
FEBRERO	-5.404	-3.527	SI	SI	FEBRERO	-5.700	-3.527	SI	SI
MARZO	-6.465	-3.527	SI	SI	MARZO	-5.013	-3.527	SI	SI
ABRIL	-5.266	-3.527	SI	SI	ABRIL	-3.716	-3.527	SI	SI
MAYO	-5.592	-3.527	SI	SI	MAYO	-3.886	-3.527	SI	SI
JUNIO	-5.480	-3.527	SI	SI	JUNIO	-5.485	-3.527	SI	SI
JULIO	-5.162	-3.527	SI	SI	JULIO	-5.316	-3.527	SI	SI
AGOSTO	-6.264	-3.527	SI	SI	AGOSTO	-3.765	-3.527	SI	SI
SEPTIEMBRE	-6.287	-3.527	SI	SI	SEPTIEMBRE	-4.572	-3.527	SI	SI
OCTUBRE	-5.627	-3.527	SI	SI	OCTUBRE	-4.800	-3.527	SI	SI
NOVIEMBRE	-5.045	-3.527	SI	SI	NOVIEMBRE	-6.153	-3.527	SI	SI
DICIEMBRE	-6.322	-3.527	SI	SI	DICIEMBRE	-5.605	-3.527	SI	SI

### Continuación del cuadro 20

PRUEBA DE RAIZ UNITARIA				
ESTACION:	COLCAS			
MES	$\tau_{\mu}$	$\tau_c$	$\hat{\tau}_{\mu} < \tau_c?$	¿SERIE ESTACIONARIA?
ENERO	-6.235	-3.527	SI	SI
FEBRERO	-6.147	-3.527	SI	SI
MARZO	-4.724	-3.527	SI	SI
ABRIL	-5.285	-3.527	SI	SI
MAYO	-5.214	-3.527	SI	SI
JUNIO	-4.890	-3.527	SI	SI
JULIO	-5.792	-3.527	SI	SI
AGOSTO	-6.498	-3.527	SI	SI
SEPTIEMBRE	-5.715	-3.527	SI	SI
OCTUBRE	-4.901	-3.527	SI	SI
NOVIEMBRE	-4.205	-3.527	SI	SI
DICIEMBRE	-4.441	-3.527	SI	SI
PRUEBA DE RAIZ UNITARIA				
ESTACION:	CEDROS			
MES	$\tau_{\mu}$	$\tau_c$	$\hat{\tau}_{\mu} < \tau_c?$	¿SERIE ESTACIONARIA?
ENERO	-6.468	-3.527	SI	SI
FEBRERO	-6.181	-3.527	SI	SI
MARZO	-6.463	-3.527	SI	SI
ABRIL	-5.260	-3.527	SI	SI
MAYO	-4.450	-3.527	SI	SI
JUNIO	-4.922	-3.527	SI	SI
JULIO	-3.627	-3.527	SI	SI
AGOSTO	-4.992	-3.527	SI	SI
SEPTIEMBRE	-5.228	-3.527	SI	SI
OCTUBRE	-5.022	-3.527	SI	SI
NOVIEMBRE	-6.275	-3.527	SI	SI
DICIEMBRE	-6.529	-3.527	SI	SI
PRUEBA DE RAIZ UNITARIA				
ESTACION:	QUITARACSA			
MES	$\tau_{\mu}$	$\tau_c$	$\hat{\tau}_{\mu} < \tau_c?$	¿SERIE ESTACIONARIA?
ENERO	-5.217	-3.527	SI	SI
FEBRERO	-5.595	-3.527	SI	SI
MARZO	-7.292	-3.527	SI	SI
ABRIL	-5.460	-3.527	SI	SI
MAYO	-4.524	-3.527	SI	SI
JUNIO	-5.023	-3.527	SI	SI
JULIO	-5.383	-3.527	SI	SI
AGOSTO	-6.098	-3.527	SI	SI
SEPTIEMBRE	-6.181	-3.527	SI	SI
OCTUBRE	-4.324	-3.527	SI	SI
NOVIEMBRE	-5.339	-3.527	SI	SI
DICIEMBRE	-5.219	-3.527	SI	SI

### 3 Estimación de los parámetros de los modelo identificados

El parámetro variancia del error estimado mediante el software SAMS 2007 para los modelos identificados y para cada estación de aforo es mostrado en el cuadro 21.

Cuadro 21: Varianza del ruido blanco o variancia del error  $\sigma_\varepsilon^2$  de las descargas mensuales

ESTACION : QUEROCOCHA				ESTACION : OLLEROS				ESTACION : QUILLCAY			
MES	MODELO			MES	MODELO			MES	MODELO		
	PARAM (1,0)	PARAM (2,0)	PARAM (3,0)		PARAM (1,0)	PARAM (2,0)	PARAM (3,0)		PARAM (1,0)	PARAM (2,0)	PARAM (3,0)
ENERO	0.300	0.298	0.265	ENERO	2.846	2.486	2.478	ENERO	5.867	5.650	5.448
FEBRERO	2.228	2.224	2.222	FEBRERO	6.856	6.677	6.671	FEBRERO	5.822	5.792	5.695
MARZO	1.081	1.080	1.052	MARZO	5.036	5.034	4.981	MARZO	6.765	6.753	6.586
ABRIL	0.318	0.318	0.261	ABRIL	2.798	2.741	2.615	ABRIL	5.333	4.881	4.745
MAYO	0.135	0.135	0.133	MAYO	0.916	0.913	0.913	MAYO	1.053	1.050	1.050
JUNIO	0.010	0.010	0.009	JUNIO	0.101	0.097	0.097	JUNIO	0.497	0.434	0.434
JULIO	0.003	0.003	0.003	JULIO	0.087	0.086	0.083	JULIO	0.252	0.251	0.223
AGOSTO	0.005	0.005	0.005	AGOSTO	0.056	0.050	0.048	AGOSTO	0.376	0.372	0.352
SEPTIEMBRE	0.024	0.023	0.022	SEPTIEMBRE	0.312	0.306	0.306	SEPTIEMBRE	0.523	0.503	0.459
OCTUBRE	0.097	0.084	0.078	OCTUBRE	0.783	0.759	0.721	OCTUBRE	0.712	0.670	0.625
NOVIEMBRE	0.271	0.269	0.254	NOVIEMBRE	1.244	1.234	1.210	NOVIEMBRE	1.803	1.785	1.721
DICIEMBRE	0.383	0.364	0.326	DICIEMBRE	1.521	1.326	1.324	DICIEMBRE	5.549	5.538	5.528

ESTACION : CHANCOS				ESTACION : LLANGANUCO				ESTACION : PARON			
MES	MODELO			MES	MODELO			MES	MODELO		
	PARAM (1,0)	PARAM (2,0)	PARAM (3,0)		PARAM (1,0)	PARAM (2,0)	PARAM (3,0)		PARAM (1,0)	PARAM (2,0)	PARAM (3,0)
ENERO	3.479	3.152	3.150	ENERO	0.322	0.286	0.277	ENERO	0.263	0.251	0.249
FEBRERO	7.062	7.035	6.125	FEBRERO	0.419	0.388	0.372	FEBRERO	0.714	0.712	0.536
MARZO	12.231	12.176	12.115	MARZO	0.435	0.434	0.424	MARZO	1.066	1.031	0.911
ABRIL	9.977	8.434	8.249	ABRIL	0.422	0.419	0.354	ABRIL	0.344	0.344	0.323
MAYO	2.597	2.279	2.228	MAYO	0.120	0.116	0.090	MAYO	0.119	0.117	0.114
JUNIO	1.378	1.362	1.292	JUNIO	0.090	0.087	0.087	JUNIO	0.221	0.218	0.187
JULIO	0.378	0.315	0.315	JULIO	0.171	0.134	0.122	JULIO	0.761	0.753	0.524
AGOSTO	0.100	0.096	0.095	AGOSTO	0.047	0.045	0.045	AGOSTO	0.895	0.835	0.782
SEPTIEMBRE	0.832	0.808	0.807	SEPTIEMBRE	0.091	0.091	0.059	SEPTIEMBRE	0.359	0.340	0.272
OCTUBRE	2.503	2.476	2.333	OCTUBRE	0.075	0.071	0.071	OCTUBRE	0.090	0.077	0.074
NOVIEMBRE	3.690	3.100	2.973	NOVIEMBRE	0.089	0.087	0.087	NOVIEMBRE	0.098	0.092	0.092
DICIEMBRE	6.053	6.045	5.813	DICIEMBRE	0.251	0.235	0.235	DICIEMBRE	0.336	0.318	0.294

ESTACION : COLCAS				ESTACION : LOS CEDROS				ESTACION : QUITARACSA			
MES	MODELO			MES	MODELO			MES	MODELO		
	PARAM (1,0)	PARAM (2,0)	PARAM (3,0)		PARAM (1,0)	PARAM (2,0)	PARAM (3,0)		PARAM (1,0)	PARAM (2,0)	PARAM (3,0)
ENERO	4.297	4.153	4.088	ENERO	0.86	0.85	0.75	ENERO	13.020	12.622	11.751
FEBRERO	5.036	5.011	4.514	FEBRERO	1.04	1.01	1.01	FEBRERO	24.733	24.397	20.900
MARZO	8.033	7.512	7.207	MARZO	1.72	1.67	1.63	MARZO	22.947	22.945	22.902
ABRIL	3.691	3.638	3.221	ABRIL	0.94	0.93	0.92	ABRIL	13.803	13.522	10.463
MAYO	0.787	0.776	0.758	MAYO	0.17	0.17	0.16	MAYO	2.306	2.086	2.051
JUNIO	1.068	0.961	0.957	JUNIO	0.10	0.10	0.10	JUNIO	0.745	0.719	0.715
JULIO	0.615	0.601	0.510	JULIO	0.08	0.07	0.07	JULIO	0.585	0.584	0.584
AGOSTO	0.731	0.682	0.667	AGOSTO	0.29	0.29	0.27	AGOSTO	0.482	0.341	0.332
SEPTIEMBRE	0.831	0.794	0.711	SEPTIEMBRE	0.15	0.14	0.12	SEPTIEMBRE	0.440	0.438	0.437
OCTUBRE	0.537	0.520	0.519	OCTUBRE	0.26	0.26	0.22	OCTUBRE	2.221	2.220	2.129
NOVIEMBRE	0.973	0.960	0.950	NOVIEMBRE	0.21	0.21	0.21	NOVIEMBRE	2.226	1.982	1.982
DICIEMBRE	1.866	1.732	1.671	DICIEMBRE	0.81	0.81	0.67	DICIEMBRE	9.360	9.099	8.998

#### 4 Validación estadística o selección del modelo adecuado

La validación o selección del modelo adecuado se ha efectuado mediante las pruebas de criterio de información de Schwarz modificado (SIC), calculada con la ecuación 44. Los resultados se muestran en el cuadro 22.

Cuadro 22: Validación estadística o selección del modelo estocástico adecuado para los caudales mensuales de los afluentes del río santa

ENERO			FEBRERO			MARZO		
N°	ESTACIÓN	MODELO	N°	ESTACIÓN	MODELO	N°	ESTACIÓN	MODELO
1	QUEROCOCHA	PARMA (1,0)	1	QUEROCOCHA	PARMA (1,0)	1	QUEROCOCHA	PARMA (1,0)
2	OLLEROS	PARMA (2,0)	2	OLLEROS	PARMA (1,0)	2	OLLEROS	PARMA (1,0)
3	QUILLCAY	PARMA (1,0)	3	QUILLCAY	PARMA (1,0)	3	QUILLCAY	PARMA (1,0)
4	CHANCOS	PARMA (2,0)	4	CHANCOS	PARMA (1,0)	4	CHANCOS	PARMA (1,0)
5	LLANGANUCO	PARMA (2,0)	5	LLANGANUCO	PARMA (1,0)	5	LLANGANUCO	PARMA (1,0)
6	PARON	PARMA (1,0)	6	PARON	PARMA (3,0)	6	PARON	PARMA (1,0)
7	COLCAS	PARMA (1,0)	7	COLCAS	PARMA (1,0)	7	COLCAS	PARMA (1,0)
8	LOS CEDROS	PARMA (1,0)	8	LOS CEDROS	PARMA (1,0)	8	LOS CEDROS	PARMA (1,0)
9	QUITARACSA	PARMA (1,0)	9	QUITARACSA	PARMA (1,0)	9	QUITARACSA	PARMA (1,0)
	PARMA (1,0)	6		PARMA (1,0)	8		PARMA (1,0)	9
	PARMA (2,0)	3		PARMA (2,0)	0		PARMA (2,0)	0
	PARMA (3,0)	0		PARMA (3,0)	1		PARMA (3,0)	0

Continuación del cuadro 22

ABRIL		
N°	ESTACIÓN	MODELO
1	QUEROCOCHA	PARMA (3,0)
2	OLLEROS	PARMA (1,0)
3	QUILLCAY	PARMA (1,0)
4	CHANCOS	PARMA (2,0)
5	LLANGANUCO	PARMA (1,0)
6	PARON	PARMA (1,0)
7	COLCAS	PARMA (1,0)
8	LOS CEDROS	PARMA (1,0)
9	QUITARACSA	PARMA (3,0)
PARMA (1,0)		6
PARMA (2,0)		1
PARMA (3,0)		2

MAYO		
N°	ESTACIÓN	MODELO
1	QUEROCOCHA	PARMA (1,0)
2	OLLEROS	PARMA (1,0)
3	QUILLCAY	PARMA (1,0)
4	CHANCOS	PARMA (2,0)
5	LLANGANUCO	PARMA (3,0)
6	PARON	PARMA (1,0)
7	COLCAS	PARMA (2,0)
8	LOS CEDROS	PARMA (1,0)
9	QUITARACSA	PARMA (2,0)
PARMA (1,0)		5
PARMA (2,0)		3
PARMA (3,0)		1

JUNIO		
N°	ESTACIÓN	MODELO
1	QUEROCOCHA	PARMA (1,0)
2	OLLEROS	PARMA (1,0)
3	QUILLCAY	PARMA (2,0)
4	CHANCOS	PARMA (1,0)
5	LLANGANUCO	PARMA (1,0)
6	PARON	PARMA (1,0)
7	COLCAS	PARMA (2,0)
8	LOS CEDROS	PARMA (2,0)
9	QUITARACSA	PARMA (1,0)
PARMA (1,0)		6
PARMA (2,0)		3
PARMA (3,0)		0

JULIO		
N°	ESTACIÓN	MODELO
1	QUEROCOCHA	PARMA (1,0)
2	OLLEROS	PARMA (1,0)
3	QUILLCAY	PARMA (1,0)
4	CHANCOS	PARMA (2,0)
5	LLANGANUCO	PARMA (2,0)
6	PARON	PARMA (3,0)
7	COLCAS	PARMA (3,0)
8	LOS CEDROS	PARMA (3,0)
9	QUITARACSA	PARMA (1,0)
PARMA (1,0)		4
PARMA (2,0)		2
PARMA (3,0)		3

AGOSTO		
N°	ESTACIÓN	MODELO
1	QUEROCOCHA	PARMA (1,0)
2	OLLEROS	PARMA (2,0)
3	QUILLCAY	PARMA (1,0)
4	CHANCOS	PARMA (1,0)
5	LLANGANUCO	PARMA (1,0)
6	PARON	PARMA (1,0)
7	COLCAS	PARMA (1,0)
8	LOS CEDROS	PARMA (1,0)
9	QUITARACSA	PARMA (2,0)
PARMA (1,0)		7
PARMA (2,0)		2
PARMA (3,0)		0

SEPTIEMBRE		
N°	ESTACIÓN	MODELO
1	QUEROCOCHA	PARMA (1,0)
2	OLLEROS	PARMA (1,0)
3	QUILLCAY	PARMA (1,0)
4	CHANCOS	PARMA (1,0)
5	LLANGANUCO	PARMA (3,0)
6	PARON	PARMA (3,0)
7	COLCAS	PARMA (1,0)
8	LOS CEDROS	PARMA (3,0)
9	QUITARACSA	PARMA (1,0)
PARMA (1,0)		6
PARMA (2,0)		0
PARMA (3,0)		3

OCTUBRE		
N°	ESTACIÓN	MODELO
1	QUEROCOCHA	PARMA (2,0)
2	OLLEROS	PARMA (1,0)
3	QUILLCAY	PARMA (1,0)
4	CHANCOS	PARMA (1,0)
5	LLANGANUCO	PARMA (1,0)
6	PARON	PARMA (1,0)
7	COLCAS	PARMA (1,0)
8	LOS CEDROS	PARMA (1,0)
9	QUITARACSA	PARMA (1,0)
PARMA (1,0)		8
PARMA (2,0)		1
PARMA (3,0)		0

NOVIEMBRE		
N°	ESTACIÓN	MODELO
1	QUEROCOCHA	PARMA (1,0)
2	OLLEROS	PARMA (1,0)
3	QUILLCAY	PARMA (1,0)
4	CHANCOS	PARMA (2,0)
5	LLANGANUCO	PARMA (1,0)
6	PARON	PARMA (1,0)
7	COLCAS	PARMA (1,0)
8	LOS CEDROS	PARMA (1,0)
9	QUITARACSA	PARMA (2,0)
PARMA (1,0)		7
PARMA (2,0)		2
PARMA (3,0)		0

DICIEMBRE		
N°	ESTACIÓN	MODELO
1	QUEROCOCHA	PARMA (1,0)
2	OLLEROS	PARMA (2,0)
3	QUILLCAY	PARMA (1,0)
4	CHANCOS	PARMA (1,0)
5	LLANGANUCO	PARMA (1,0)
6	PARON	PARMA (1,0)
7	COLCAS	PARMA (1,0)
8	LOS CEDROS	PARMA (1,0)
9	QUITARACSA	PARMA (1,0)
PARMA (1,0)		8
PARMA (2,0)		1
PARMA (3,0)		0

## 5 Evaluación del modelo seleccionado PAR(1)

Para verificar si el modelo seleccionado es adecuado para interpretar el comportamiento de los caudales mensuales en los afluentes del río Santa, se ha evaluado el comportamiento de los residuos del modelo PARMA (1, 0). Los residuos se calculan con las ecuaciones del (99) al (110).

**Para el mes de enero**

$$\varepsilon_{v,ene} = y_{v,ene} - \mu_{ene} - \phi_{dic,ene}y_{v,dic} + \phi_{dic,ene}\mu_{dic} \quad (99)$$

**Para el mes de febrero**

$$\varepsilon_{v,feb} = y_{v,feb} - \mu_{feb} - \phi_{ene,feb}y_{v,ene} + \phi_{ene,feb}\mu_{ene} \quad (100)$$

**Para el mes de marzo**

$$\varepsilon_{v,mar} = y_{v,mar} - \mu_{mar} - \phi_{feb,mar}y_{v,feb} + \phi_{feb,mar}\mu_{feb} \quad (101)$$

**Para el mes de abril**

$$\varepsilon_{v,abr} = y_{v,abr} - \mu_{abr} - \phi_{mar,abr}y_{v,mar} + \phi_{mar,abr}\mu_{mar} \quad (102)$$

**Para el mes de mayo**

$$\varepsilon_{v,may} = y_{v,may} - \mu_{mayo} - \phi_{abr,may}y_{v,abr} + \phi_{abr,may}\mu_{abr} \quad (103)$$

**Para el mes de junio**

$$\varepsilon_{v,jun} = y_{v,jun} - \mu_{jun} - \phi_{may,jun}y_{v,may} + \phi_{may,jun}\mu_{may} \quad (104)$$

**Para el mes de julio**

$$\varepsilon_{v,jul} = y_{v,jul} - \mu_{jul} - \phi_{jun,jul}y_{v,jun} + \phi_{jun,jul}\mu_{jun} \quad (105)$$

**Para el mes de agosto**

$$\varepsilon_{v,ago} = y_{v,ago} - \mu_{ago} - \phi_{jul,ago}y_{v,jul} + \phi_{jul,ago}\mu_{jul} \quad (106)$$

**Para el mes de setiembre**

$$\varepsilon_{v,set} = y_{v,set} - \mu_{set} + \phi_{ago,set}y_{v,ago} + \phi_{ago,set}\mu_{ago} \quad (107)$$

**Para el mes de octubre**

$$\varepsilon_{v,oct} = y_{v,oct} - \mu_{oct} - \phi_{set,oct}y_{v,set} + \phi_{set,oct}\mu_{set} \quad (108)$$

**Para el mes de noviembre**

$$\varepsilon_{v,nov} = y_{v,nov} - \mu_{nov} - \phi_{oct,nov}y_{v,oct} + \phi_{oct,nov}\mu_{oct} \quad (109)$$

**Para el mes de diciembre**

$$\varepsilon_{v,dic} = y_{v,dic} - \mu_{dic} - \phi_{nov,dic}y_{v,nov} + \phi_{nov,dic}\mu_{nov} \quad (110)$$

Los parámetros  $\mu_{\tau}$  y  $\phi_{1,\tau}$  de las ecuaciones del (99) al (110) se han obtenido con las ecuaciones indicadas en el cuadro 5 y aplicando SAMS 2007 se han encontrado los resultados que se indican en el cuadro 23 y 24 respectivamente.

La evaluación de los residuos obtenidos con las ecuaciones del (99) al (110) se muestra en el cuadro 25. Las pruebas de contraste se han realizado siguiendo los criterios establecidos en 3.2.7.a.

## 6 Generación de caudales mensuales con el modelo PAR (1) en los afluentes del río Santa

Después de definir el modelo adecuado al modelo PAR(1), se ha generado las descargas medias mensuales mediante las ecuaciones de 111 al 122. Los modelos estocásticos periódicos para cada mes son:

**Para el mes de enero**

$$y_{v,ene} = \mu_{ene} + \phi_{dic,ene}y_{v,dic} - \phi_{dic,ene}\mu_{dic} + \varepsilon_{v,ene} \quad (111)$$



Cuadro 23: Parámetros: media mensual ( $\mu_{\tau}$ ) de las uencas en estudio: modelo PAR(1)

ESTACION	ENERO	FEBRERO	MARZO	ABRIL	MAYO	JUNIO	JULIO	AGOSTO	SEPTIEMBRE	OCTUBRE	NOVIEMBRE	DICIEMBRE
QUEROCOCHA	2.590	3.688	3.663	2.454	1.288	0.700	0.469	0.461	0.635	1.128	1.599	2.106
OLLEROS	6.732	8.314	8.728	6.183	3.484	2.350	1.825	1.971	2.533	3.976	5.145	5.852
QUILLCAY	10.312	11.774	11.810	8.909	5.580	3.787	3.064	3.417	3.926	5.568	7.723	9.215
CHANCOS	11.273	13.160	13.926	10.466	6.566	4.583	4.074	4.251	4.965	7.310	8.502	10.145
LLANGANUCO	3.899	4.351	4.503	3.787	2.736	2.217	2.034	2.012	1.980	2.340	2.990	3.522
PARON	2.307	2.892	2.587	2.271	2.052	1.700	1.754	2.115	1.560	1.418	1.641	1.937
COLCAS	7.787	9.291	9.445	6.905	4.726	3.820	3.313	3.231	3.282	4.176	5.207	6.342
LOS CEDROS	4.010	4.735	5.172	4.451	3.088	2.422	2.247	2.460	2.402	2.838	3.161	3.625
QUITARACSA	13.276	17.894	19.005	14.810	9.123	7.029	5.833	5.529	6.012	8.243	9.374	10.441
<b>MEDIA</b>	<b>6.910</b>	<b>8.456</b>	<b>8.760</b>	<b>6.693</b>	<b>4.294</b>	<b>3.179</b>	<b>2.735</b>	<b>2.827</b>	<b>3.033</b>	<b>4.111</b>	<b>5.038</b>	<b>5.909</b>
D.E	4.019	5.091	5.437	4.128	2.473	1.874	1.561	1.478	1.701	2.509	2.940	3.368
C.V	0.582	0.602	0.621	0.617	0.576	0.590	0.571	0.523	0.561	0.610	0.584	0.570
D.E= DESVIACION ESTANDAR												
C.V= COEFICIENTE DE VARIACION												

Cuadro 24: Parámetros  $f_i (\phi_{1,\tau})$  mensual de las cuencas en estudio: modelo PAR (1).

ESTACION	ENERO	FEBRERO	MARZO	ABRIL	MAYO	JUNIO	JULIO	AGOSTO	SEPTIEMBRE	OCTUBRE	NOVIEMBRE	DICIEMBRE
QUEROCOCHA	0.717	1.079	0.330	0.512	0.176	0.406	0.636	0.761	0.933	0.555	1.211	1.087
OLLEROS	0.548	0.545	0.606	0.602	0.362	0.448	0.590	1.008	0.452	1.027	1.028	0.883
QUILLCAY	0.316	0.567	0.588	0.525	0.261	0.473	0.706	0.857	0.760	0.803	1.062	0.934
CHANCOS	0.620	0.627	0.628	0.172	0.480	0.457	0.591	0.841	0.647	1.432	0.878	0.737
LLANGANUCO	0.826	0.524	0.522	0.383	0.410	0.722	0.420	0.837	0.879	0.837	0.821	0.653
PARON	0.921	1.404	0.288	0.682	0.334	0.669	0.749	0.742	0.498	0.411	0.951	0.424
COLCAS	0.898	0.452	0.524	0.340	0.475	0.607	0.710	0.712	0.981	1.033	0.801	0.704
LOS CEDROS	0.442	0.840	0.347	0.706	0.364	0.608	0.492	1.087	0.616	0.555	0.911	0.743
QUITARACSA	0.697	0.722	0.366	0.541	0.289	0.550	0.820	1.065	0.758	1.070	0.224	0.809
<b>MEDIA</b>	<b>0.665</b>	<b>0.751</b>	<b>0.466</b>	<b>0.496</b>	<b>0.350</b>	<b>0.549</b>	<b>0.635</b>	<b>0.879</b>	<b>0.725</b>	<b>0.858</b>	<b>0.876</b>	<b>0.775</b>
D.E	0.205	0.311	0.133	0.171	0.099	0.110	0.127	0.141	0.187	0.320	0.276	0.187
C.V	0.309	0.415	0.286	0.346	0.283	0.200	0.199	0.160	0.258	0.373	0.315	0.242
	$\emptyset_{\text{DIC,ENE}}$	$\emptyset_{\text{ENE,FEB}}$	$\emptyset_{\text{FEB,MAR}}$	$\emptyset_{\text{MAR,ABR}}$	$\emptyset_{\text{ABR,MAY}}$	$\emptyset_{\text{MAY,JUN}}$	$\emptyset_{\text{JUN,JUL}}$	$\emptyset_{\text{JUL,AGO}}$	$\emptyset_{\text{AGO,SET}}$	$\emptyset_{\text{SET,OCT}}$	$\emptyset_{\text{OCT,NOV}}$	$\emptyset_{\text{NOV,DIC}}$
D.E= DESVIACION ESTANDAR												
C.V= COEFICIENTE DE VARIACION												

Cuadro 25: Pruebas de contraste de los residuos del modelo PAR(1)

MES : ENERO

ESTACION	PRUEBA DE LA MEDIA				ANALISIS DE CORRELACION				ANALISIS DE NORMALIDAD			
	$ t $	$T_t$	$ t  \leq T_t$	¿MEDIA DE LOS RESIDUOS IGUAL CERO?	Q(M)	CHI CUADRADO (M-q) TABULAR $\alpha=0.05$	Q(M)B < CHI CUADRADO (M-q)	¿CORRELACION SINIFICATIVA?	$ g_c $	Gt	$ g_c  \leq g_t$	¿LOS RESIDUOS SE DISTRIBUYE NORMALMENTE?
QUEROCOCHA	-0.019	1.96	SI	SI	14.70	16.92	SI	NO	0.306	0.5811	SI	SI
OLLEROS	-0.013	1.96	SI	SI	22.38	16.92	NO	SI	0.916	0.5811	NO	NO
QUILCAY	-0.009	1.96	SI	SI	5.76	16.92	SI	NO	0.890	0.5811	NO	NO
CHANCOS	-0.147	1.96	SI	SI	14.41	16.92	SI	NO	0.554	0.5811	SI	SI
LLANGANUCO	0.014	1.96	SI	SI	10.71	16.92	SI	NO	0.269	0.5811	SI	SI
PARON	0.175	1.96	SI	SI	5.01	16.92	SI	NO	0.686	0.5811	NO	NO
COLCAS	0.157	1.96	SI	SI	9.12	16.92	SI	NO	0.872	0.5811	NO	NO
LOS CEDROS	-0.151	1.96	SI	SI	23.19	16.92	NO	SI	0.607	0.5811	NO	NO
QUITARACSA	0.024	1.96	SI	SI	12.35	16.92	SI	NO	0.648	0.5811	NO	NO
			ACEPTADO	9			ACEPTADO	7			ACEPTADO	3
			RECHAZADO	0			RECHAZADO	2			RECHAZADO	6

MES : FEBRERO

ESTACION	PRUEBA DE LA MEDIA				ANALISIS DE CORRELACION				ANALISIS DE NORMALIDAD			
	$ t $	$T_t$	$ t  \leq T_t$	¿MEDIA DE LOS RESIDUOS IGUAL CERO?	Q(M)	CHI CUADRADO (M-q) TABULAR $\alpha=0.05$	Q(M)B < CHI CUADRADO (M-q)	¿CORRELACION SINIFICATIVA?	$ g_c $	Gt	$ g_c  \leq g_t$	¿LOS RESIDUOS SE DISTRIBUYE NORMALMENTE?
QUEROCOCHA	5.023	1.96	NO	NO	8.42	16.92	SI	NO	1.4031	0.5811	NO	NO
OLLEROS	2.094	1.96	NO	NO	9.70	16.92	SI	NO	0.7647	0.5811	NO	NO
QUILCAY	2.175	1.96	NO	NO	13.63	16.92	SI	NO	0.6002	0.5811	NO	NO
CHANCOS	2.816	1.96	NO	NO	9.68	16.92	SI	NO	0.4564	0.5811	SI	SI
LLANGANUCO	0.237	1.96	SI	SI	8.62	16.92	SI	NO	0.6507	0.5811	NO	NO
PARON	6.149	1.96	NO	NO	11.29	16.92	SI	NO	1.4174	0.5811	NO	NO
COLCAS	1.915	1.96	SI	SI	13.06	16.92	SI	NO	0.5271	0.5811	SI	SI
LOS CEDROS	3.780	1.96	NO	NO	7.68	16.92	SI	NO	0.2382	0.5811	SI	SI
QUITARACSA	4.091	1.96	NO	NO	5.89	16.92	SI	NO	0.7387	0.5811	NO	NO
			ACEPTADO	2			ACEPTADO	9			ACEPTADO	3
			RECHAZADO	6			RECHAZADO	0			RECHAZADO	6

MES : MARZO

ESTACION	PRUEBA DE LA MEDIA				ANALISIS DE CORRELACION				ANALISIS DE NORMALIDAD			
	$ t $	$T_t$	$ t  \leq T_t$	¿MEDIA DE LOS RESIDUOS IGUAL CERO?	Q(M)	CHI CUADRADO (M-q) TABULAR $\alpha=0.05$	Q(M)B < CHI CUADRADO (M-q)	¿CORRELACION SINIFICATIVA?	$ g_c $	Gt	$ g_c  \leq g_t$	¿LOS RESIDUOS SE DISTRIBUYE NORMALMENTE?
QUEROCOCHA	0.000	1.96	SI	SI	5.49	16.92	SI	NO	0.368	0.5811	SI	SI
OLLEROS	0.000	1.96	SI	SI	7.36	16.92	SI	NO	0.300	0.5811	SI	SI
QUILCAY	0.000	1.96	SI	SI	16.56	16.92	SI	NO	0.808	0.5811	NO	NO
CHANCOS	0.000	1.96	SI	SI	5.23	16.92	SI	NO	0.169	0.5811	SI	SI
LLANGANUCO	0.000	1.96	SI	SI	14.70	16.92	SI	NO	1.076	0.5811	NO	NO
PARON	0.000	1.96	SI	SI	3.89	16.92	SI	NO	0.218	0.5811	SI	SI
COLCAS	0.000	1.96	SI	SI	6.73	16.92	SI	NO	0.500	0.5811	SI	SI
LOS CEDROS	0.000	1.96	SI	SI	16.79	16.92	SI	NO	0.939	0.5811	NO	NO
QUITARACSA	0.000	1.96	SI	SI	18.76	16.92	NO	SI	0.582	0.5811	NO	NO
			ACEPTADO	9			ACEPTADO	8			ACEPTADO	5
			RECHAZADO	0			RECHAZADO	1			RECHAZADO	4

Continuación del cuadro 25.

MES : ABRIL

ESTACION	PRUEBA DE LA MEDIA				ANALISIS DE CORRELACION				ANALISIS DE NORMALIDAD				
	$ t $	$T_t$	$ t  \leq T_t$	¿MEDIA DE LOS RESIDUOS IGUAL CERO?	Q(M)	CHI CUADRADO (M-q) TABULAR $\alpha=0.05$	Q(M)B < CHI CUADRADO (M-q)	¿CORRELACION SIGNIFICATIVA?	$ g_c $	Gt	$ g_c  \leq g_t$	¿LOS RESIDUOS SE DISTRIBUYE NORMALMENTE?	
QUEROCOCHA	0.000	1.96	SI	SI	11.62	16.92	SI	NO	0.077	0.5811	SI	SI	
OLLEROS	0.000	1.96	SI	SI	5.29	16.92	SI	NO	0.284	0.5811	SI	SI	
QUILCAY	0.000	1.96	SI	SI	13.63	16.92	SI	NO	0.217	0.5811	SI	SI	
CHANCOS	0.000	1.96	SI	SI	6.57	16.92	SI	NO	0.148	0.5811	SI	SI	
LLANGANUCO	0.000	1.96	SI	SI	15.61	16.92	SI	NO	0.804	0.5811	NO	NO	
PARON	0.000	1.96	SI	SI	12.67	16.92	SI	NO	0.758	0.5811	NO	NO	
COLCAS	0.000	1.96	SI	SI	7.40	16.92	SI	NO	0.170	0.5811	SI	SI	
LOS CEDROS	0.000	1.96	SI	SI	13.27	16.92	SI	NO	0.090	0.5811	SI	SI	
QUITARACSA	0.000	1.96	SI	SI	18.29	16.92	NO	SI	0.196	0.5811	SI	SI	
			ACEPTADO	9				ACEPTADO	8			ACEPTADO	7
			RECHAZADO	0				RECHAZADO	1			RECHAZADO	2

MES : MAYO

ESTACION	PRUEBA DE LA MEDIA				ANALISIS DE CORRELACION				ANALISIS DE NORMALIDAD				
	$ t $	$T_t$	$ t  \leq T_t$	¿MEDIA DE LOS RESIDUOS IGUAL CERO?	Q(M)	CHI CUADRADO (M-q) TABULAR $\alpha=0.05$	Q(M)B < CHI CUADRADO (M-q)	¿CORRELACION SIGNIFICATIVA?	$ g_c $	Gt	$ g_c  \leq g_t$	¿LOS RESIDUOS SE DISTRIBUYE NORMALMENTE?	
QUEROCOCHA	0.000	1.96	SI	SI	9.39	16.92	SI	NO	1.030	0.5811	NO	NO	
OLLEROS	0.000	1.96	SI	SI	10.73	16.92	SI	NO	1.365	0.5811	NO	NO	
QUILCAY	0.000	1.96	SI	SI	7.44	16.92	SI	NO	0.723	0.5811	NO	NO	
CHANCOS	0.000	1.96	SI	SI	6.12	16.92	SI	NO	0.325	0.5811	SI	SI	
LLANGANUCO	0.000	1.96	SI	SI	10.11	16.92	SI	NO	0.911	0.5811	NO	NO	
PARON	0.000	1.96	SI	SI	11.84	16.92	SI	NO	0.250	0.5811	SI	SI	
COLCAS	0.000	1.96	SI	SI	5.23	16.92	SI	NO	0.341	0.5811	SI	SI	
LOS CEDROS	0.000	1.96	SI	SI	2.75	16.92	SI	NO	0.694	0.5811	NO	NO	
QUITARACSA	0.000	1.96	SI	SI	20.03	16.92	NO	SI	1.045	0.5811	NO	NO	
			ACEPTADO	9				ACEPTADO	8			ACEPTADO	3
			RECHAZADO	0				RECHAZADO	1			RECHAZADO	6

MES : JUNIO

ESTACION	PRUEBA DE LA MEDIA				ANALISIS DE CORRELACION				ANALISIS DE NORMALIDAD				
	$ t $	$T_t$	$ t  \leq T_t$	¿MEDIA DE LOS RESIDUOS IGUAL CERO?	Q(M)	CHI CUADRADO (M-q) TABULAR $\alpha=0.05$	Q(M)B < CHI CUADRADO (M-q)	¿CORRELACION SIGNIFICATIVA?	$ g_c $	Gt	$ g_c  \leq g_t$	¿LOS RESIDUOS SE DISTRIBUYE NORMALMENTE?	
QUEROCOCHA	0.000	1.96	SI	SI	11.10	16.92	SI	NO	0.215	0.5811	SI	SI	
OLLEROS	0.000	1.96	SI	SI	5.04	16.92	SI	NO	0.133	0.5811	SI	SI	
QUILCAY	0.000	1.96	SI	SI	15.00	16.92	SI	NO	0.095	0.5811	SI	SI	
CHANCOS	0.000	1.96	SI	SI	18.42	16.92	NO	SI	0.234	0.5811	SI	SI	
LLANGANUCO	0.000	1.96	SI	SI	4.43	16.92	SI	NO	0.447	0.5811	SI	SI	
PARON	0.000	1.96	SI	SI	4.19	16.92	SI	NO	0.525	0.5811	SI	SI	
COLCAS	0.000	1.96	SI	SI	8.01	16.92	SI	NO	1.507	0.5811	NO	NO	
LOS CEDROS	0.000	1.96	SI	SI	6.96	16.92	SI	NO	0.501	0.5811	SI	SI	
QUITARACSA	0.000	1.96	SI	SI	10.12	16.92	SI	NO	0.721	0.5811	NO	NO	
			ACEPTADO	9				ACEPTADO	8			ACEPTADO	7
			RECHAZADO	0				RECHAZADO	1			RECHAZADO	2

Continuación del cuadro 25.

MES : JULIO

ESTACION	PRUEBA DE LA MEDIA				ANALISIS DE CORRELACION				ANALISIS DE NORMALIDAD			
	$ t $	$T_t$	$ t  \leq T_t$	¿MEDIA DE LOS RESIDUOS IGUAL CERO?	Q(M)	CHI CUADRADO (M-q) TABULAR $\alpha=0.05$	Q(M)B < CHI CUADRADO (M-q)	¿CORRELACION SINIFICATIVA?	$ g_c $	Gt	$ g_c  \leq g_t$	¿ LOS RESIDUOS SE DISTRIBUYE NORMALMENTE?
QUEROCOCHA	0.000	Tt	SI	SI	6.51	16.92	SI	NO	0.379	0.5811	SI	SI
OLLEROS	0.000	1.96	SI	SI	8.22	16.92	SI	NO	0.232	0.5811	SI	SI
QUILCAY	0.000	1.96	SI	SI	9.70	16.92	SI	NO	0.106	0.5811	SI	SI
CHANCOS	0.000	1.96	SI	SI	7.73	16.92	SI	NO	0.273	0.5811	SI	SI
LLANGANUCO	0.000	1.96	SI	SI	1.40	16.92	SI	NO	2.905	0.5811	NO	NO
PARON	0.000	1.96	SI	SI	9.41	16.92	SI	NO	3.227	0.5811	NO	NO
COLCAS	0.000	1.96	SI	SI	5.12	16.92	SI	NO	1.779	0.5811	NO	NO
LOS CEDROS	0.000	1.96	SI	SI	12.29	16.92	SI	NO	0.044	0.5811	SI	SI
QUITARACSA	0.000	1.96	SI	SI	21.31	16.92	NO	SI	1.735	0.5811	NO	NO
			ACEPTADO	9			ACEPTADO	8			ACEPTADO	5
			RECHAZADO	0			RECHAZADO	1			RECHAZADO	4

MES : AGOSTO

ESTACION	PRUEBA DE LA MEDIA				ANALISIS DE CORRELACION				ANALISIS DE NORMALIDAD			
	$ t $	$T_t$	$ t  \leq T_t$	¿MEDIA DE LOS RESIDUOS IGUAL CERO?	Q(M)	CHI CUADRADO (M-q) TABULAR $\alpha=0.05$	Q(M)B < CHI CUADRADO (M-q)	¿CORRELACION SINIFICATIVA?	$ g_c $	Gt	$ g_c  \leq g_t$	¿ LOS RESIDUOS SE DISTRIBUYE NORMALMENTE?
QUEROCOCHA	0.000	1.96	SI	SI	14.03	16.92	SI	NO	0.166	0.5811	SI	SI
OLLEROS	0.000	1.96	SI	SI	27.79	16.92	NO	SI	0.371	0.5811	SI	SI
QUILCAY	0.000	1.96	SI	SI	8.63	16.92	SI	NO	0.229	0.5811	SI	SI
CHANCOS	0.000	1.96	SI	SI	17.77	16.92	NO	SI	0.223	0.5811	SI	SI
LLANGANUCO	0.000	1.96	SI	SI	11.33	16.92	SI	NO	0.442	0.5811	SI	SI
PARON	0.000	1.96	SI	SI	29.42	16.92	NO	SI	2.231	0.5811	NO	NO
COLCAS	0.000	1.96	SI	SI	8.20	16.92	SI	NO	0.968	0.5811	NO	NO
LOS CEDROS	0.000	1.96	SI	SI	13.13	16.92	SI	NO	1.702	0.5811	NO	NO
QUITARACSA	0.000	1.96	SI	SI	11.64	16.92	SI	NO	0.648	0.5811	NO	NO
			ACEPTADO	9			ACEPTADO	6			ACEPTADO	5
			RECHAZADO	0			RECHAZADO	3			RECHAZADO	4

MES : SETIEMBRE

ESTACION	PRUEBA DE LA MEDIA				ANALISIS DE CORRELACION				ANALISIS DE NORMALIDAD			
	$ t $	$T_t$	$ t  \leq T_t$	¿MEDIA DE LOS RESIDUOS IGUAL CERO?	Q(M)	CHI CUADRADO (M-q) TABULAR $\alpha=0.05$	Q(M)B < CHI CUADRADO (M-q)	¿CORRELACION SINIFICATIVA?	$ g_c $	Gt	$ g_c  \leq g_t$	¿ LOS RESIDUOS SE DISTRIBUYE NORMALMENTE?
QUEROCOCHA	0.000	1.96	SI	SI	10.64	16.92	SI	NO	1.311	0.5811	NO	NO
OLLEROS	0.000	1.96	SI	SI	15.01	16.92	SI	NO	0.232	0.5811	SI	SI
QUILCAY	0.000	1.96	SI	SI	21.10	16.92	NO	SI	1.369	0.5811	NO	NO
CHANCOS	0.000	1.96	SI	SI	14.06	16.92	SI	NO	0.736	0.5811	NO	NO
LLANGANUCO	0.000	1.96	SI	SI	9.38	16.92	SI	NO	1.292	0.5811	NO	NO
PARON	0.000	1.96	SI	SI	14.00	16.92	SI	NO	-0.976	0.5811	SI	SI
COLCAS	0.000	1.96	SI	SI	7.77	16.92	SI	NO	1.139	0.5811	NO	NO
LOS CEDROS	0.000	1.96	SI	SI	17.75	16.92	NO	SI	0.293	0.5811	SI	SI
QUITARACSA	0.000	1.96	SI	SI	18.29	16.92	NO	SI	0.395	0.5811	SI	SI
			ACEPTADO	9			ACEPTADO	6			ACEPTADO	4
			RECHAZADO	0			RECHAZADO	3			RECHAZADO	5

Continuación del cuadro 25.

MES : OCTUBRE

ESTACION	PRUEBA DE LA MEDIA				ANALISIS DE CORRELACION				ANALISIS DE NORMALIDAD			
	$ t $	$T_t$	$ t  \leq T_t$	¿MEDIA DE LOS RESIDUOS IGUAL CERO?	Q(M)	CHI CUADRADO (M-q) TABULAR $\alpha=0.05$	Q(M)B < CHI CUADRADO (M-q)	¿CORRELACION SINIFICATIVA?	$ g_c $	Gt	$ g_c  \leq g_t$	¿LOS RESIDUOS SE DISTRIBUYE NORMALMENTE?
QUEROCOCHA	0.000	1.96	SI	SI	13.54	16.92	SI	NO	0.642	0.5811	NO	NO
OLLEROS	0.000	1.96	SI	SI	9.21	16.92	SI	NO	0.978	0.5811	NO	NO
QUILCAY	0.000	1.96	SI	SI	4.76	16.92	SI	NO	0.381	0.5811	SI	SI
CHANCOS	0.000	1.96	SI	SI	8.00	16.92	SI	NO	0.841	0.5811	NO	NO
LLANGANUCO	0.000	1.96	SI	SI	12.63	16.92	SI	NO	0.060	0.5811	SI	SI
PARON	0.000	1.96	SI	SI	13.91	16.92	SI	NO	0.526	0.5811	SI	SI
COLCAS	0.000	1.96	SI	SI	6.64	16.92	SI	NO	0.361	0.5811	SI	SI
LOS CEDROS	0.000	1.96	SI	SI	6.36	16.92	SI	NO	0.713	0.5811	NO	NO
QUITARACSA	0.000	1.96	SI	SI	15.86	16.92	SI	NO	0.158	0.5811	SI	SI
			ACEPTADO	9			ACEPTADO	9			ACEPTADO	5
			RECHAZADO	0			RECHAZADO	0			RECHAZADO	4

MES : NOVIEMBRE

ESTACION	PRUEBA DE LA MEDIA				ANALISIS DE CORRELACION				ANALISIS DE NORMALIDAD			
	$ t $	$T_t$	$ t  \leq T_t$	¿MEDIA DE LOS RESIDUOS IGUAL CERO?	Q(M)	CHI CUADRADO (M-q) TABULAR $\alpha=0.05$	Q(M)B < CHI CUADRADO (M-q)	¿CORRELACION SINIFICATIVA?	$ g_c $	Gt	$ g_c  \leq g_t$	¿LOS RESIDUOS SE DISTRIBUYE NORMALMENTE?
QUEROCOCHA	0.000	1.96	SI	SI	21.24	16.92	NO	SI	1.3929	0.5811	NO	NO
OLLEROS	0.000	1.96	SI	SI	11.35	16.92	SI	NO	0.7073	0.5811	NO	NO
QUILCAY	0.000	1.96	SI	SI	13.63	16.92	SI	NO	1.1986	0.5811	NO	NO
CHANCOS	0.000	1.96	SI	SI	9.27	16.92	SI	NO	1.4930	0.5811	NO	NO
LLANGANUCO	0.000	1.96	SI	SI	10.90	16.92	SI	NO	0.1543	0.5811	SI	SI
PARON	0.000	1.96	SI	SI	7.73	16.92	SI	NO	2.5911	0.5811	NO	NO
COLCAS	0.000	1.96	SI	SI	15.34	16.92	SI	NO	0.1743	0.5811	SI	SI
LOS CEDROS	0.000	1.96	SI	SI	11.82	16.92	SI	NO	0.8187	0.5811	NO	NO
QUITARACSA	0.000	1.96	SI	SI	10.45	16.92	SI	NO	0.6339	0.5811	NO	NO
			ACEPTADO	9			ACEPTADO	8			ACEPTADO	2
			RECHAZADO	0			RECHAZADO	1			RECHAZADO	7

MES : DICIEMBRE

ESTACION	PRUEBA DE LA MEDIA				ANALISIS DE CORRELACION				ANALISIS DE NORMALIDAD			
	$ t $	$T_t$	$ t  \leq T_t$	¿MEDIA DE LOS RESIDUOS IGUAL CERO?	Q(M)	CHI CUADRADO (M-q) TABULAR $\alpha=0.05$	Q(M)B < CHI CUADRADO (M-q)	¿CORRELACION SINIFICATIVA?	$ g_c $	Gt	$ g_c  \leq g_t$	¿LOS RESIDUOS SE DISTRIBUYE NORMALMENTE?
QUEROCOCHA	0.000	1.96	SI	SI	11.00	16.92	SI	NO	0.425	0.5811	SI	SI
OLLEROS	0.000	1.96	SI	SI	15.50	16.92	SI	NO	0.407	0.5811	SI	SI
QUILCAY	0.000	1.96	SI	SI	11.42	16.92	SI	NO	1.376	0.5811	NO	NO
CHANCOS	0.000	1.96	SI	SI	7.53	16.92	SI	NO	1.107	0.5811	NO	NO
LLANGANUCO	0.000	1.96	SI	SI	10.68	16.92	SI	NO	0.402	0.5811	SI	SI
PARON	0.000	1.96	SI	SI	8.00	16.92	SI	NO	2.184	0.5811	NO	NO
COLCAS	0.000	1.96	SI	SI	3.72	16.92	SI	NO	0.099	0.5811	SI	SI
LOS CEDROS	0.000	1.96	SI	SI	18.68	16.92	NO	SI	0.389	0.5811	SI	SI
QUITARACSA	0.000	1.96	SI	SI	5.69	16.92	SI	NO	0.935	0.5811	NO	NO
			ACEPTADO	9			ACEPTADO	8			ACEPTADO	5
			RECHAZADO	0			RECHAZADO	1			RECHAZADO	4

RESUMEN TOTAL

DESCRIPCION	MES	%
RESUMEN TOTAL	108	100
RESIDUOS IGUAL A CERO	101	94
MEDIAS DIFERENTES	7	6

RESUMEN TOTAL

DESCRIPCION	MES	%
RESUMEN TOTAL	108	100
HAY CORRELACION	15	14
NO HAY CORRELACION	93	86

RESUMEN TOTAL

DESCRIPCION	MES	%
RESUMEN TOTAL	108	100
DISTRIBUCION NORMAL	54	50
DISTRIBUCION NO NORMAL	54	50

Para el mes de febrero

$$y_{v,feb} = \mu_{feb} + \phi_{ene,feb} y_{v,ene} - \phi_{ene,feb} \mu_{ene} + \varepsilon_{v,feb} \quad (112)$$

**Para el mes de marzo**

$$y_{v,mar} = \mu_{mar} + \phi_{feb,mar}y_{v,feb} - \phi_{feb,mar}\mu_{feb} + \varepsilon_{v,mar} \quad (113)$$

Para el mes de abril

$$y_{v,abr} = \mu_{abr} + \phi_{mar,abr}y_{v,mar} - \phi_{mar,abr}\mu_{mar} + \varepsilon_{v,abr} \quad (114)$$

**Para el mes de mayo**

$$y_{v,may} = \mu_{mayo} + \phi_{abr,may}y_{v,abr} - \phi_{abr,may}\mu_{abr} + \varepsilon_{v,may} \quad (115)$$

**Para el mes de junio**

$$y_{v,jun} = \mu_{jun} + \phi_{may,jun}y_{v,may} - \phi_{may,jun}\mu_{may} + \varepsilon_{v,jun} \quad (116)$$

**Para el mes de julio**

$$y_{v,jul} = \mu_{jul} + \phi_{jun,jul}y_{v,jun} - \phi_{jun,jul}\mu_{jun} + \varepsilon_{v,jul} \quad (117)$$

**Para el mes de agosto**

$$y_{v,ago} = \mu_{ago} + \phi_{jul,ago}y_{v,jul} - \phi_{jul,ago}\mu_{jul} + \varepsilon_{v,ago} \quad (118)$$

**Para el mes de setiembre**

$$y_{v,set} = \mu_{set} + \phi_{ago,set}y_{v,ago} - \phi_{ago,set}\mu_{ago} + \varepsilon_{v,set} \quad (119)$$

**Para el mes de octubre**

$$y_{v,oct} = \mu_{oct} + \phi_{set,oct}y_{v,set} - \phi_{set,oct}\mu_{set} + \varepsilon_{v,oct} \quad (120)$$

**Para el mes de noviembre**

$$y_{v,nov} = \mu_{nov} + \phi_{oct,nov}y_{v,oct} - \phi_{oct,nov}\mu_{oct} + \varepsilon_{v,nov} \quad (121)$$

**Para el mes de diciembre**

$$y_{v,dic} = \mu_{dic} + \phi_{nov,dic}y_{v,nov} - \phi_{nov,dic}\mu_{nov} + \varepsilon_{v,dic} \quad (122)$$

Los parámetros  $\phi_{1,t}$  y  $\mu$  de las ecuaciones del (111) al (123) para cada mes y en cada estación hidrográfica se muestran en los cuadros 23 y 24.

La componente aleatoria  $\varepsilon_{v,\tau}$  se genera con la ayuda de la hoja de cálculo Excel. Esta variable tiene media igual a cero y la desviación estándar igual a la desviación estándar de los datos históricos correspondientes a cada mes de cada estación de aforo.

## 7 Verificación de la bondad de ajuste del modelo estocástico PAR (1)

Para verificar si es adecuado el modelo estocástico PAR (1) se ha generado caudales sintéticos, y estos valores se han comparado con los valores históricos, mediante la prueba de medias y la prueba de homogeneidad de variancias.

Los resultados encontrados de la prueba de medias y de la prueba de homogeneidad de variancias entre los valores históricos y los valores generados se muestran en el cuadro 26.

Cuadro 26: Prueba de medias y de homogeneidad de variancias de las descargas mensuales históricas y generadas (modelo PAR(1)) en la cuenca del río Santa

MES: ENERO

ESTACION	MEDIA HISTORICA	MEDIA GENERADA	Tc	Tt	¿ Tc <Tt?	¿MEDIA HISTORICA ES IGUAL A LA MEDIA GENERADA?	VARIANZA HISTORICA	VARIANZA GENERADA	¿VAR HISTO>VAR GENE?	Fc	Ft	¿Fc<Ft?	¿VARIANZA HISTORICA HISTORICA ES IGUAL A LA VARIANZA GENERADA?
QUEROCOCHA	2.59	2.45	0.70	1.66	SI	MEDIAS IGUALES	0.78	0.76	SI	1.024	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
OLLEROS	6.73	6.42	0.70	1.66	SI	MEDIAS IGUALES	3.98	4.04	NO	1.014	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
QUILLCAY	10.31	10.10	0.36	1.66	SI	MEDIAS IGUALES	6.88	8.07	NO	1.174	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
CHANCOS	11.27	11.10	0.30	1.66	SI	MEDIAS IGUALES	7.58	5.44	SI	1.394	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
LLANGANUCO	3.90	4.02	-0.72	1.66	SI	MEDIAS IGUALES	0.58	0.51	SI	1.145	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
PARON	2.31	2.28	0.18	1.66	SI	MEDIAS IGUALES	0.61	0.59	SI	1.024	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
COLCAS	7.79	8.20	-0.76	1.66	SI	MEDIAS IGUALES	7.12	5.16	SI	1.380	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
LOS CEDROS	4.01	4.31	-1.31	1.66	SI	MEDIAS IGUALES	1.10	1.02	SI	1.080	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
QUITARACSA	13.28	12.96	0.34	1.66	SI	MEDIAS IGUALES	18.80	17.41	SI	1.080	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
						MEDIAS IGUALES	9					HAY HOMOGENEIDAD	9
						MEDIAS DIFERENTES	0					NO HAY HOMOGENEIDAD	0

MES: FEBRERO

ESTACION	MEDIA HISTORICA	MEDIA GENERADA	Tc	Tt	¿ Tc <Tt?	¿MEDIA HISTORICA ES IGUAL A LA MEDIA GENERADA?	VARIANZA HISTORICA	VARIANZA GENERADA	¿VAR HISTO>VAR GENE?	Fc	Ft	¿Fc<Ft?	¿VARIANZA HISTORICA HISTORICA ES IGUAL A LA VARIANZA GENERADA?
QUEROCOCHA	3.69	2.27	3.70	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	3.188	2.857	SI	1.116	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
OLLEROS	8.31	7.01	1.95	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	8.210	10.326	NO	1.258	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
QUILLCAY	11.77	11.47	0.46	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	8.182	9.549	NO	1.167	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
CHANCOS	13.16	11.72	2.07	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	10.219	9.636	SI	1.061	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
LLANGANUCO	4.35	4.22	0.88	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.589	0.372	SI	1.584	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
PARON	2.89	2.11	2.38	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	1.927	2.523	NO	1.309	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
COLCAS	9.29	8.98	0.57	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	6.614	5.826	SI	1.135	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
LOS CEDROS	4.74	4.69	0.14	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	1.837	1.755	SI	1.047	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
QUITARACSA	17.89	13.69	3.40	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	35.150	27.429	SI	1.281	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
						MEDIAS IGUALES	4.000					HAY HOMOGENEIDAD	9
						MEDIAS DIFERENTES	5.000					NO HAY HOMOGENEIDAD	0

Continuación del cuadro 26

ESTACION	MEDIA HISTORICA	MEDIA GENERADA	Tc	Tt	¿ Tc <Tt?	¿MEDIA HISTORICA ES IGUAL A LA MEDIA GENERADA?	VARIANZA HISTORICA	VARIANZA GENERADA	¿VAR HISTO>VAR GENE?	Fc	Ft	¿Fc<Ft?	¿VARIANZA HISTORICA HISTORICA ES IGUAL A LA VARIANZA GENERADA?
QUEROCOCHA	3.69	2.27	3.70	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	3.188	2.857	SI	1.116	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
OLLEROS	8.31	7.01	1.95	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	8.210	10.326	NO	1.258	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
QUILLCAY	11.77	11.47	0.46	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	8.182	9.549	NO	1.167	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
CHANCOS	13.16	11.72	2.07	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	10.219	9.636	SI	1.061	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
LLANGANUCO	4.35	4.22	0.88	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.589	0.372	SI	1.584	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
PARON	2.89	2.11	2.38	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	1.927	2.523	NO	1.309	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
COLCAS	9.29	8.98	0.57	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	6.614	5.826	SI	1.135	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
LOS CEDROS	4.74	4.69	0.14	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	1.837	1.755	SI	1.047	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
QUITARACSA	17.89	13.69	3.40	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	35.150	27.429	SI	1.281	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
						MEDIAS IGUALES	4.000					HAY HOMOGENEIDAD	9
						MEDIAS DIFERENTES	5.000					NO HAY HOMOGENEIDAD	0

MES: MARZO

ESTACION	MEDIA HISTORICA	MEDIA GENERADA	Tc	Tt	¿ Tc <Tt?	¿MEDIA HISTORICA ES IGUAL A LA MEDIA GENERADA?	VARIANZA HISTORICA	VARIANZA GENERADA	¿VAR HISTO>VAR GENE?	Fc	Ft	¿Fc<Ft?	¿VARIANZA HISTORICA HISTORICA ES IGUAL A LA VARIANZA GENERADA?
QUEROCOCHA	3.66	3.01	2.772	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	1.455	1.726	NO	1.187	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
OLLEROS	8.73	8.63	0.510	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	8.175	9.745	NO	1.192	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
QUILLCAY	11.81	11.40	0.407	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	9.762	14.124	NO	1.447	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
CHANCOS	13.93	13.27	1.903	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	16.565	13.653	SI	1.213	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
LLANGANUCO	4.50	4.47	1.632	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.606	0.632	NO	1.042	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
PARON	2.59	2.50	0.755	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	1.252	1.188	SI	1.054	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
COLCAS	9.45	9.90	-2.239	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	10.047	10.345	NO	1.030	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
LOS CEDROS	5.17	4.98	-3.204	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	1.980	2.097	NO	1.059	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
QUITARACSA	19.01	17.90	0.981	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	28.221	39.522	NO	1.400	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
						MEDIAS IGUALES	5.000					HAY HOMOGENEIDAD	9.000
						MEDIAS DIFERENTES	4.000					NO HAY HOMOGENEIDAD	0.000



Continuación del cuadro 26

MES: MAYO

ESTACION	MEDIA HISTORICA	MEDIA GENERADA	Tc	Tt	¿ Tc <Tt?	¿MEDIA HISTORICA ES IGUAL A LA MEDIA GENERADA?	VARIANZA HISTORICA	VARIANZA GENERADA	¿VAR HISTO>VAR GENE?	Fc	Ft	¿Fc<Ft?	¿VARIANZA HISTORICA HISTORICA ES IGUAL A LA VARIANZA GENERADA?
QUEROCOCHA	1.29	1.21	2.149	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	0.160	0.144	SI	1.113	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
OLLEROS	3.48	3.36	-2.776	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	1.705	2.146	NO	1.259	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
QUILLCAY	5.58	5.71	-0.030	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	1.635	1.702	NO	1.041	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
CHANCOS	6.57	6.35	0.218	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	5.125	5.763	NO	1.124	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
LLANGANUCO	2.74	2.69	3.029	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	0.211	0.215	NO	1.019	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
PARON	2.03	2.11	2.291	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	0.226	0.218	SI	1.036	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
COLCAS	4.73	4.65	-1.416	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	1.920	1.569	SI	1.224	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
LOS CEDROS	3.09	3.00	0.332	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.436	0.492	NO	1.127	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
QUITARACSA	9.12	9.68	1.678	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	4.237	3.462	SI	1.224	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
						MEDIAS IGUALES	4.000					HAY HOMOGENEDIDAD	9.000
						MEDIAS DIFERENTES	5.000					NO HAY HOMOGENEIDAD	0.000

MES: JUNIO

ESTACION	MEDIA HISTORICA	MEDIA GENERADA	Tc	Tt	¿ Tc <Tt?	¿MEDIA HISTORICA ES IGUAL A LA MEDIA GENERADA?	VARIANZA HISTORICA	VARIANZA GENERADA	¿VAR HISTO>VAR GENE?	Fc	Ft	¿Fc<Ft?	¿VARIANZA HISTORICA HISTORICA ES IGUAL A LA VARIANZA GENERADA?
QUEROCOCHA	0.70	0.65	-0.041	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.036	0.041	NO	1.124	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
OLLEROS	2.35	2.30	-4.877	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	0.447	0.553	NO	1.239	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
QUILLCAY	3.79	3.84	-1.085	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.876	0.612	SI	1.432	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
CHANCOS	4.58	4.54	-1.116	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	2.483	2.697	NO	1.086	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
LLANGANUCO	2.22	2.09	0.831	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.202	0.227	NO	1.122	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
PARON	1.70	1.74	2.388	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	0.327	0.394	NO	1.204	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
COLCAS	3.82	3.96	0.005	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	1.802	1.233	SI	1.462	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
LOS CEDROS	2.42	2.33	1.777	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	0.264	0.352	NO	1.330	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
QUITARACSA	7.03	7.46	2.859	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	2.047	2.383	NO	1.164	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
						MEDIAS IGUALES	5.000					HAY HOMOGENEDIDAD	9.000
						MEDIAS DIFERENTES	4.000					NO HAY HOMOGENEIDAD	0.000

Continuación del cuadro 26

MES: JULIO

ESTACION	MEDIA HISTORICA	MEDIA GENERADA	Tc	Tt	¿ Tc <Tt?	¿MEDIA HISTORICA ES IGUAL A LA MEDIA GENERADA?	VARIANZA HISTORICA	VARIANZA GENERADA	¿VAR HISTO>VAR GENE?	Fc	Ft	¿Fc<Ft?	¿VARIANZA HISTORICA HISTORICA ES IGUAL A LA VARIANZA GENERADA?
QUEROCOCHA	0.47	0.47	0.451	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.018	0.021	NO	1.190	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
OLLEROS	1.83	1.83	-6.506	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	0.244	0.238	SI	1.028	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
QUILLCAY	3.06	3.06	-1.002	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.695	0.410	SI	1.695	1.693	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD
CHANCOS	4.07	4.07	-0.726	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	1.256	1.537	NO	1.224	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
LLANGANUCO	2.03	2.03	2.006	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	0.211	0.243	NO	1.150	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
PARON	1.75	1.75	1.464	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.964	0.750	SI	1.285	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
COLCAS	3.22	3.31	0.122	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	1.539	0.762	SI	2.021	1.693	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD
LOS CEDROS	2.23	2.25	2.803	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	0.148	0.160	NO	1.083	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
QUITARACSA	5.83	5.83	2.905	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	1.975	1.600	SI	1.235	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
						MEDIAS IGUALES	5.000					HAY HOMOGENEDIDAD	7.000
						MEDIAS DIFERENTES	4.000					NO HAY HOMOGENEIDAD	2.000

MES: AGOSTO

ESTACION	MEDIA HISTORICA	MEDIA GENERADA	Tc	Tt	¿ Tc <Tt?	¿MEDIA HISTORICA ES IGUAL A LA MEDIA GENERADA?	VARIANZA HISTORICA	VARIANZA GENERADA	¿VAR HISTO>VAR GENE?	Fc	Ft	¿Fc<Ft?	¿VARIANZA HISTORICA HISTORICA ES IGUAL A LA VARIANZA GENERADA?
QUEROCOCHA	0.46	0.44	0.207	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.016	0.012	SI	1.269	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
OLLEROS	1.97	1.99	-5.034	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	0.305	0.242	SI	1.264	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
QUILLCAY	3.42	3.50	0.717	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.897	0.302	SI	2.974	1.693	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD
CHANCOS	4.25	4.12	-0.166	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.991	1.087	NO	1.097	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
LLANGANUCO	2.01	2.02	0.079	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.196	0.170	SI	1.152	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
PARON	2.12	2.16	2.224	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	1.448	0.413	SI	3.503	1.693	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD
COLCAS	3.23	3.28	-0.117	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	1.531	0.386	SI	3.961	1.693	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD
LOS CEDROS	2.46	2.35	2.737	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	0.474	0.189	SI	2.506	1.693	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD
QUITARACSA	5.53	6.07	1.386	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	2.733	1.814	SI	1.507	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
						MEDIAS IGUALES	6.000					HAY HOMOGENEDIDAD	5.000
						MEDIAS DIFERENTES	3.000					NO HAY HOMOGENEIDAD	4.000

Continuación del cuadro 26

MES: SETIEMBRE

ESTACION	MEDIA HISTORICA	MEDIA GENERADA	Tc	Tt	¿ Tc <Tt?	¿MEDIA HISTORICA ES IGUAL A LA MEDIA GENERADA?	VARIANZA HISTORICA	VARIANZA GENERADA	¿VAR HISTO>VAR GENE?	Fc	Ft	¿Fc<Ft?	¿VARIANZA HISTORICA HISTORICA ES IGUAL A LA VARIANZA GENERADA?
QUEROCOCHA	0.64	0.58	-0.01	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.038	0.029	SI	1.319	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
OLLEROS	2.53	2.47	-2.61	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	0.383	0.334	SI	1.145	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
QUILLCAY	3.93	3.94	0.623	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	1.054	0.650	SI	1.622	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
CHANCOS	4.97	5.04	1.668	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	1.268	1.073	SI	1.182	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
LLANGANUCO	1.98	1.98	0.386	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.245	0.247	NO	1.006	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
PARON	1.56	1.53	0.935	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.727	0.597	SI	1.217	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
COLCAS	3.28	3.41	-0.99	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	2.325	0.659	SI	3.527	1.693	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD
LOS CEDROS	2.40	2.36	0.943	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.329	0.218	SI	1.506	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
QUITARACSA	6.01	6.37	1.463	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	2.022	1.244	SI	1.625	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
						MEDIAS IGUALES	7.000					HAY HOMOGENEDIDAD	8.000
						MEDIAS DIFERENTES	2.000					NO HAY HOMOGENEIDAD	1.000

MES: OCTUBRE

ESTACION	MEDIA HISTORICA	MEDIA GENERADA	Tc	Tt	¿ Tc <Tt?	¿MEDIA HISTORICA ES IGUAL A LA MEDIA GENERADA?	VARIANZA HISTORICA	VARIANZA GENERADA	¿VAR HISTO>VAR GENE?	Fc	Ft	¿Fc<Ft?	¿VARIANZA HISTORICA HISTORICA ES IGUAL A LA VARIANZA GENERADA?
QUEROCOCHA	1.13	1.10	0.100	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.111	0.102	SI	1.090	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
OLLEROS	3.98	3.90	-0.064	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	1.207	0.838	SI	1.439	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
QUILLCAY	5.57	5.58	1.026	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	1.408	1.347	SI	1.046	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
CHANCOS	7.31	7.57	2.630	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	5.166	5.924	NO	1.147	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
LLANGANUCO	2.34	2.34	0.275	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.248	0.222	SI	1.116	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
PARON	1.42	1.37	-0.180	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.216	0.151	SI	1.427	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
COLCAS	4.18	4.17	-2.273	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	3.030	1.096	SI	2.765	1.693	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD
LOS CEDROS	2.84	2.86	-1.106	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.370	0.326	SI	1.135	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
QUITARACSA	8.24	8.69	0.258	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	4.590	3.436	SI	1.336	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
						MEDIAS IGUALES	7.000					HAY HOMOGENEDIDAD	8.000
						MEDIAS DIFERENTES	2.000					NO HAY HOMOGENEIDAD	1.000

## Continuación del cuadro 26

MES: NOVIEMBRE

ESTACION	MEDIA HISTORICA	MEDIA GENERADA	Tc	Tt	¿ Tc <Tt?	¿MEDIA HISTORICA ES IGUAL A LA MEDIA GENERADA?	VARIANZA HISTORICA	VARIANZA GENERADA	¿VAR HISTO>VAR GENE?	Fc	Ft	¿Fc<Ft?	¿VARIANZA HISTORICA HISTORICA ES IGUAL A LA VARIANZA GENERADA?
QUEROCOCHA	1.60	1.59	-0.184	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.440	0.445	NO	1.010	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
OLLEROS	5.15	5.06	0.667	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	2.550	2.970	NO	1.164	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
QUILLCAY	7.72	7.58	2.694	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	3.438	2.881	SI	1.193	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
CHANCOS	8.50	8.63	2.149	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	7.765	7.110	SI	1.092	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
LLANGANUCO	2.99	3.01	-0.012	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.259	0.189	SI	1.367	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
PARON	1.64	1.55	-0.598	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.295	0.230	SI	1.287	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
COLCAS	5.21	5.35	-3.310	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	2.940	1.198	SI	2.453	1.693	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD
LOS CEDROS	3.16	3.26	-2.278	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	0.521	0.446	SI	1.167	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
QUITARACSA	9.37	9.69	-1.458	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	2.511	2.985	NO	1.189	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
						MEDIAS IGUALES	5.000					HAY HOMOGENEIDAD	8.000
						MEDIAS DIFERENTES	4.000					NO HAY HOMOGENEIDAD	1.000

MES: DICIEMBRE

ESTACION	MEDIA HISTORICA	MEDIA GENERADA	Tc	Tt	¿ Tc <Tt?	¿MEDIA HISTORICA ES IGUAL A LA MEDIA GENERADA?	VARIANZA HISTORICA	VARIANZA GENERADA	¿VAR HISTO>VAR GENE?	Fc	Ft	¿Fc<Ft?	¿VARIANZA HISTORICA HISTORICA ES IGUAL A LA VARIANZA GENERADA?
QUEROCOCHA	2.11	1.94	0.268	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.913	0.857	SI	1.065	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
OLLEROS	5.85	6.06	0.255	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	3.548	4.093	NO	1.154	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
QUILLCAY	9.22	8.79	2.684	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	8.686	6.239	SI	1.392	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
CHANCOS	10.15	10.29	2.721	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	10.427	6.013	SI	1.734	1.693	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD
LLANGANUCO	3.52	3.70	0.007	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.367	0.472	NO	1.284	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
PARON	1.94	1.93	-0.775	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.398	0.456	NO	1.146	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
COLCAS	6.34	6.29	-1.883	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	3.369	2.283	SI	1.476	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
LOS CEDROS	3.63	3.94	-2.738	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	1.116	1.418	NO	1.271	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
QUITARACSA	10.44	9.98	-1.877	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	11.236	6.891	SI	1.631	1.693	SI	HAY HOMOGENEIDAD
						MEDIAS IGUALES	4.000					HAY HOMOGENEIDAD	8.000
						MEDIAS DIFERENTES	5.000					NO HAY HOMOGENEIDAD	1.000

### RESUMEN TOTAL

DESCRIPCION	MES	%
RESUMEN TOTAL	108	100
MEDIAS IGUALES	67	62
MEDIAS DIFERENTES	41	38

### RESUMEN TOTAL

DESCRIPCION	MES	%
RESUMEN TOTAL	108	100
VARIANCIAS HOMOGENEAS	98	91
VARIANCIAS NO HOMOGENEAS	10	9

## 8 Regionalización de los parámetros del modelo estocástico periódico PAR (1) de los caudales mensuales en la cuenca del río Santa

Los parámetros regionalizados son: la descarga media mensual  $\mu_t$ , el parámetro autorregresivo  $\phi_{1,t}$  y la varianza del error  $\sigma_{\varepsilon_t}^2$  de los modelos dados en las ecuaciones del (100) al (111).

### 8.1 Regionalización de la descarga media mensual en la cuenca del río Santa $\mu_t$

Para la regionalización de la descarga media mensual se ha correlacionado las descargas medias mensuales con el área de la cuenca y el porcentaje de área glaciar (G).

El modelo adecuado para las descargas medias mensuales en los ríos estudiados es el modelo de regresión lineal múltiple. Los resultados se muestran en el cuadro 27.

Cuadro 27: Modelo regional adecuado para las descargas medias mensuales ( $\mu_t$ ) de la cuenca del río Santa.

MES	$r_c$	$r_{crit}$	¿CORRELACION SIGNIFICATIVA?	PARAMETROS DE REGRESION LINAL MULTIPLE			MODELO REPRESENTATIVO
				$a_0$	$a_1$	$a_2$	
ENERO	0.9836	0.6660	SI	-0.170	0.036	0.025	$\mu_{ENE} = -0.170 + 0.036A + 0.025G$
FEBRERO	0.9901	0.6660	SI	0.099	0.045	0.010	$\mu_{FEB} = 0.099 + 0.045A + 0.010G$
MARZO	0.9891	0.6660	SI	-0.051	0.048	0.008	$\mu_{MAR} = -0.051 + 0.048A + 0.008G$
ABRIL	0.9856	0.6660	SI	-0.415	0.037	0.020	$\mu_{ABR} = -0.415 + 0.037A + 0.020G$
MAYO	0.9882	0.6660	SI	-0.542	0.023	0.031	$\mu_{MAY} = -0.542 + 0.023A + 0.031G$
JUNIO	0.9772	0.6660	SI	-0.649	0.017	0.030	$\mu_{JUN} = -0.649 + 0.017A + 0.030G$
JULIO	0.9663	0.6660	SI	-0.708	0.015	0.036	$\mu_{JUL} = -0.708 + 0.015A + 0.036G$
AGOSTO	0.9733	0.6660	SI	-0.644	0.014	0.042	$\mu_{AGO} = -0.644 + 0.014A + 0.042G$
SEPTIEMBRE	0.9852	0.6660	SI	-0.568	0.016	0.031	$\mu_{SET} = -0.568 + 0.016A + 0.031G$
OCTUBRE	0.9747	0.6660	SI	-0.599	0.023	0.027	$\mu_{OCT} = -0.599 + 0.023A + 0.027G$
NOVIEMBRE	0.9682	0.6660	SI	-0.306	0.026	0.026	$\mu_{NOV} = -0.306 + 0.026A + 0.026G$
DICIEMBRE	0.9582	0.6660	SI	-0.134	0.030	0.029	$\mu_{DIC} = -0.134 + 0.030A + 0.029G$

A= área de la cuenca (Km<sup>2</sup>).  $\mu$  = caudal medio (m<sup>3</sup>/s). G= porcentaje del área glaciar (%)

### 8.2 Regionalización del parámetro $\phi_{1,t}$ del modelo PAR (1) de los caudales medios mensuales en la cuenca del río Santa

Los valores de  $\phi_{1,t}$  por mes y de cada estación de aforo se muestran en el cuadro 24.

### 8.3 Regionalización de la desviación estándar del error $S_t$

La variable aleatoria  $\varepsilon_{v,t}$  del modelo regional PAR(1) depende de la desviación estándar del error  $S_{v,t}^2$ , y esta depende del área de la cuenca y del porcentaje del área glaciar. Los resultados de la correlación se muestran en el cuadro 28.

Cuadro 28: Correlación de la desviación estándar regional  $S_{v,t}$  de las descargas medias mensuales de la cuenca del río Santa.

MES	$r_c$	$r_{crit}$	¿CORRELACION SIGNIFICATIVA?	PARAMETROS DE REGRESION LINAL MULTIPLE			MODELO REPRESENTATIVO
				$a_0$	$a_1$	$a_2$	
ENERO	0.9764	0.6660	SI	0.054	0.009	-0.003	$S_{ENE} = -0.054 + 0.009A - 0.003G$
FEBRERO	0.9409	0.6660	SI	0.742	0.010	-0.019	$S_{FEB} = 0.742 + 0.010A - 0.019G$
MARZO	0.9768	0.6660	SI	0.131	0.012	-0.001	$S_{MAR} = 1.131 + 0.012A - 0.001G$
ABRIL	0.9786	0.6660	SI	-0.288	0.010	0.007	$S_{ABR} = -0.288 + 0.010A + 0.007G$
MAYO	0.9267	0.6660	SI	0.003	0.004	0.003	$S_{MAY} = 0.003 + 0.004A + 0.003G$
JUNIO	0.8439	0.6660	SI	-0.213	0.003	0.011	$S_{JUN} = -0.213 + 0.003A + 0.011G$
JULIO	0.8197	0.6660	SI	-0.174	0.002	0.016	$S_{JUL} = -0.174 + 0.002A + 0.016G$
AGOSTO	0.5324	0.6660	NO				$S_{AGO} = 0.5$
SEPTIEMBRE	0.7941	0.6660	SI	0.011	0.002	0.009	$S_{SET} = 0.011 + 0.002A + 0.009G$
OCTUBRE	0.9044	0.6660	SI	-0.021	0.004	0.003	$S_{OCT} = -0.021 + 0.004A + 0.003G$
NOVIEMBRE	0.8673	0.6660	SI	0.138	0.004	0.0001	$S_{NOV} = 0.138 + 0.004A + 0.0001G$
DICIEMBRE	0.9571	0.6660	SI	-0.094	0.008	0.003	$S_{DIC} = -0.094 + 0.008A + 0.003G$

A= área e la cuenca en Km<sup>2</sup>,  $S_{v,t}$  = desviación estándar regional del mes t, A = área de la cuenca en Km<sup>2</sup>, G = área glaciario en porcentaje (%),  $r_c$  = coeficiente de correlación calculada,  $r_t$  = coeficiente de correlación tabular

## 9 Modelo regional de las descargas mensuales ( $\mu_{v,t}$ ) de la cuenca del río Santa

Las ecuaciones para estimar las descargas mensuales ( $\mu_{v,t}$ ) regionales en la cuenca del río Santa se muestra en los cuadro 29 y en el cuadro 28 se muestra el modelo regional para estimar la desviación estándar del error  $S_{v,t}$  y con este modelo se ha obtenido las variables aleatorias para cada mes.

Cuadro 29: Modelo regional de las descargas mensuales ( $\mu_{v,t}$ ) en la cuenca del río Santa

MES	MODELO REGIONAL
ENERO	$Q_{V,ENE} = 0.081 + 0.016 A + 0.006 G + e_{V,ENE}$
FEBRERO	$Q_{V,FEB} = -0.227 + 0.018 A + -0.008 G + e_{V,FEB}$
MARZO	$Q_{V,MAR} = 0.097 + 0.027 A + 0.003 G + e_{V,MAR}$
ABRIL	$Q_{V,ABR} = 0.390 + 0.013 A + 0.016 G + e_{V,ABR}$
MAYO	$Q_{V,MAY} = 0.397 + 0.010 A + 0.024 G + e_{V,MAY}$
JUNIO	$Q_{V,JUN} = 0.351 + 0.005 A + 0.013 G + e_{V,JUN}$
JULIO	$Q_{V,JUL} = 0.296 + 0.004 A + 0.016 G + e_{V,JUL}$
AGOSTO	$Q_{V,AGO} = 0.022 + 0.001 A + 0.010 G + e_{V,AGO}$
SEPTIEMBRE	$Q_{V,SET} = 0.101 + 0.006 A + 0.001 G + e_{V,SET}$
OCTUBRE	$Q_{V,OCT} = 0.112 + 0.009 A + 0.000 G + e_{V,OCT}$
NOVIEMBRE	$Q_{V,NOV} = -0.218 + 0.006 A + 0.003 G + e_{V,NOV}$
DICIEMBRE	$Q_{V,DIC} = -0.104 + 0.009 A + 0.009 G + e_{V,DIC}$

A= área de la cuenca (Km<sup>2</sup>). G= porcentaje del área glaciario (%). Q = caudal (m<sup>3</sup>/s)  
v= tiempo (años).  $\varepsilon_{v,t}$  = variable aleatoria de distribución normal con media cero y variancia constante.  
t = tiempo en meses enero, febrero, ..., diciembre

## **10 Verificación de la bondad de ajuste del modelo regional de las descargas medias mensuales**

La verificación de la bondad de ajuste del modelo regional mensual se ha hecho mediante la prueba de t de student y la prueba de F de Fisher, comparando los estadísticos de las series históricas y de las series generadas (media y la variancia).

Las series generadas se han obtenido mediante la aplicación de las ecuaciones del cuadro 29. Los resultados obtenidos se muestran en el cuadro 30.

## **b Discusión**

### **1 Prueba de estacionaridad de los caudales medios mensuales en los afluentes del río Santa**

Los resultados obtenidos en el cuadro 20 indican que las series de descargas medias mensuales en la cuenca del río Santa son estacionarias, es decir, los datos mensuales de las estaciones hidrográficas estudiadas tienen a través del tiempo media constante, variancia constante, la covariancia depende sólo de retardo y no hay autocorrelación significativa. Por consiguiente, las series de caudales mensuales del río Santa se pueden modelar mediante los modelos estocásticos lineales ARMA(p,q) sin realizar ninguna transformación.

### **2 Identificación del modelo estocástico adecuado para los caudales mensuales en los afluentes del río Santa**

Los modelos estocásticos identificados para la serie de caudales mensuales son de tipo autorregresivo, lo cual se ha definido comparando el comportamiento del correlograma observado y el comportamiento indicado en el cuadro 2. En todas las estaciones los coeficientes de autocorrelaciones decrecen exponencialmente y los coeficientes de autocorrelaciones parciales tienen picos significativos en los rezagos p. Se ha identificado tres tipos de modelos autorregresivos PAR(1), PAR(2) y PAR(3·).

### **3 Estimación de los parámetros de los modelos identificados**

La variancia del error  $\sigma_{\varepsilon}^2$  del cuadro 21 para el modelo PARMA(1,0) es mayor, en comparación con la variancia del error  $\sigma_{\varepsilon}^2$  encontrado para los modelos PARMA(2,0) y PARMA (3,0), en todas las estaciones de aforo en estudio. Estos parámetros estimados para diferentes estaciones de aforo sirven para seleccionar el modelo adecuado.

Cuadro 30: Prueba de medias y de homogeneidad de variancias de las descargas medias mensuales históricas y generadas (modelo PAR(1)) en la cuenca del río Santa

MES: ENERO

ESTACION	MEDIA HISTORICA	MEDIA GENERADA	Tc	Tt	¿ Tc <Tt?	¿MEDIA HISTORICA ES IGUAL A LA MEDIA GENERADA?	VARIANZA HISTORICA	VARIANZA GENERADA	Fc	Ft	¿Fc<Ft?	¿VARIANZA HISTORICA HISTORICA ES IGUAL A LA VARIANZA GENERADA?
QUEROCOCHA	2.59	2.40	1.03	1.66	SI	MEDIAS IGUALES	0.78	0.59	1.33	1.70	SI	HAY HOMOGENEIDAD
OLLEROS	6.73	6.64	0.19	1.66	SI	MEDIAS IGUALES	3.98	4.71	1.18	1.70	SI	HAY HOMOGENEIDAD
QUILLCAY	10.31	9.82	0.91	1.66	SI	MEDIAS IGUALES	6.88	5.30	1.30	1.70	SI	HAY HOMOGENEIDAD
CHANCOS	11.27	9.86	2.57	1.66	NO	MEDIAS DIFERENTES	7.58	4.83	1.57	1.70	SI	HAY HOMOGENEIDAD
LLANGANUCO	3.90	3.77	0.73	1.66	SI	MEDIAS IGUALES	0.58	0.63	1.08	1.70	SI	HAY HOMOGENEIDAD
PARON	2.31	2.65	-2.27	1.66	NO	MEDIAS DIFERENTES	0.61	0.34	1.79	1.70	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD
COLCAS	7.79	8.63	-1.44	1.66	SI	MEDIAS IGUALES	7.12	6.83	1.04	1.70	SI	HAY HOMOGENEIDAD
LOS CEDROS	4.01	4.14	-0.49	1.66	SI	MEDIAS IGUALES	1.10	1.76	1.60	1.70	SI	HAY HOMOGENEIDAD
QUITARACSA	13.28	14.27	-0.99	1.66	SI	MEDIAS IGUALES	18.80	22.55	1.20	1.70	SI	HAY HOMOGENEIDAD
						MEDIAS IGUALES	7				HAY HOMOGENEIDAD	8
						MEDIAS DIFERENTES	2				NO HAY HOMOGENEIDAD	1

MES: FEBRERO

ESTACION	MEDIA HISTORICA	MEDIA GENERADA	Tc	Tt	¿ Tc <Tt?	¿MEDIA HISTORICA ES IGUAL A LA MEDIA GENERADA?	VARIANZA HISTORICA	VARIANZA GENERADA	Fc	Ft	¿Fc<Ft?	¿VARIANZA HISTORICA HISTORICA ES IGUAL A LA VARIANZA GENERADA?
QUEROCOCHA	3.69	3.08	1.68	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	3.188	2.177	1.464	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD
OLLEROS	8.31	8.33	-0.03	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	8.210	6.017	1.365	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD
QUILLCAY	11.77	12.01	-0.39	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	8.182	6.905	1.185	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD
CHANCOS	13.16	12.50	0.90	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	10.219	12.160	1.190	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD
LLANGANUCO	4.35	4.26	0.44	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.589	1.168	1.985	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD
PARON	2.89	2.64	1.08	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	1.927	0.272	7.087	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD
COLCAS	9.29	10.64	-2.07	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	6.614	10.940	1.654	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD
LOS CEDROS	4.74	5.57	-2.43	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	1.837	3.002	1.634	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD
QUITARACSA	17.89	18.53	-0.53	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	35.150	23.977	1.466	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD
						MEDIAS IGUALES	6				HAY HOMOGENEIDAD	7
						MEDIAS DIFERENTES	3				NO HAY HOMOGENEIDAD	2



Continuación del cuadro 30.

MES: MARZO

ESTACION	MEDIA HISTORICA	MEDIA GENERADA	Tc	Tt	¿ Tc <Tt?	¿MEDIA HISTORICA ES IGUAL A LA MEDIA GENERADA?	VARIANZA HISTORICA	VARIANZA GENERADA	Fc	Ft	¿Fc<Ft?	¿VARIANZA HISTORICA HISTORICA ES IGUAL A LA VARIANZA GENERADA?	
QUEROCOCHA	3.66	3.18	2.772	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	1.455	1.141	1.275	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
OLLEROS	8.73	9.14	0.510	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	8.175	5.199	1.573	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
QUILLCAY	11.81	11.90	0.407	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	9.762	11.598	1.188	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
CHANCOS	13.93	12.59	1.903	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	16.565	17.228	1.040	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
LLANGANUCO	4.50	4.26	1.632	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.606	1.435	2.366	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD	
PARON	2.59	2.50	0.755	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	1.252	0.268	4.675	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD	
COLCAS	9.45	10.62	-2.239	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	10.047	11.157	1.110	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
LOS CEDROS	5.17	6.00	-3.204	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	1.980	1.929	1.026	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
QUITARACSA	19.01	18.18	0.981	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	28.221	27.439	1.028	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
						MEDIAS IGUALES	5					HAY HOMOGENEIDAD	7
						MEDIAS DIFERENTES	4					NO HAY HOMOGENEIDAD	2

MES: ABRIL

ESTACION	MEDIA HISTORICA	MEDIA GENERADA	Tc	Tt	¿ Tc <Tt?	¿MEDIA HISTORICA ES IGUAL A LA MEDIA GENERADA?	VARIANZA HISTORICA	VARIANZA GENERADA	Fc	Ft	¿Fc<Ft?	¿VARIANZA HISTORICA HISTORICA ES IGUAL A LA VARIANZA GENERADA?	
QUEROCOCHA	2.45	2.19	2.544	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	0.708	0.432	1.641	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
OLLEROS	6.18	6.50	-0.818	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	5.826	4.689	1.242	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
QUILLCAY	8.91	8.88	0.295	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	8.152	8.988	1.103	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
CHANCOS	10.47	9.90	1.054	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	10.716	12.961	1.209	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
LLANGANUCO	3.79	3.27	3.403	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	0.521	1.295	2.484	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD	
PARON	2.27	2.28	1.455	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.934	0.245	3.817	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD	
COLCAS	6.91	8.35	-3.046	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	4.942	3.372	1.466	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
LOS CEDROS	4.45	4.51	-0.347	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	1.955	1.076	1.817	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD	
QUITARACSA	14.81	13.53	1.457	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	22.417	21.397	1.048	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
						MEDIAS IGUALES	6					HAY HOMOGENEIDAD	6
						MEDIAS DIFERENTES	3					NO HAY HOMOGENEIDAD	3

Continuación del cuadro 30.

MES: MAYO

ESTACION	MEDIA HISTORICA	MEDIA GENERADA	Tc	Tt	¿ Tc <Tt?	¿MEDIA HISTORICA ES IGUAL A LA MEDIA GENERADA?	VARIANZA HISTORICA	VARIANZA GENERADA	Fc	Ft	¿Fc<Ft?	¿VARIANZA HISTORICA HISTORICA ES IGUAL A LA VARIANZA GENERADA?	
QUEROCOCHA	1.29	1.12	2.149	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	0.160	0.194	1.212	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
OLLEROS	3.48	3.95	-2.776	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	1.705	0.998	1.707	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD	
QUILLCAY	5.58	5.78	-0.030	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	1.635	2.674	1.635	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
CHANCOS	6.57	6.31	0.218	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	5.125	2.829	1.812	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD	
LLANGANUCO	2.74	2.55	3.029	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	0.211	0.327	1.549	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
PARON	2.03	1.99	2.291	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	0.226	0.110	2.045	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD	
COLCAS	4.73	5.30	-1.416	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	1.920	0.512	3.750	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD	
LOS CEDROS	3.09	2.92	0.332	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.436	0.407	1.072	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
QUITARACSA	9.12	8.68	1.678	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	4.237	5.160	1.218	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
						MEDIAS IGUALES	4					HAY HOMOGENEIDAD	5
						MEDIAS DIFERENTES	5					NO HAY HOMOGENEIDAD	4

MES: JUNIO

ESTACION	MEDIA HISTORICA	MEDIA GENERADA	Tc	Tt	¿ Tc <Tt?	¿MEDIA HISTORICA ES IGUAL A LA MEDIA GENERADA?	VARIANZA HISTORICA	VARIANZA GENERADA	Fc	Ft	¿Fc<Ft?	¿VARIANZA HISTORICA HISTORICA ES IGUAL A LA VARIANZA GENERADA?	
QUEROCOCHA	0.70	0.61	1.42	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.036	0.124	3.406	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD	
OLLEROS	2.35	2.85	-4.877	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	0.447	0.440	1.014	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
QUILLCAY	3.79	4.02	-1.085	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.876	1.683	1.921	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD	
CHANCOS	4.58	4.55	-1.116	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	2.483	1.743	1.425	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
LLANGANUCO	2.22	1.93	0.831	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.202	0.210	1.037	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
PARON	1.70	1.61	2.388	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	0.327	0.270	1.213	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
COLCAS	3.82	3.78	0.005	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	1.802	0.439	4.102	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD	
LOS CEDROS	2.42	2.00	1.777	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	0.264	0.245	1.081	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
QUITARACSA	7.03	6.46	2.859	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	2.047	3.739	1.826	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD	
						MEDIAS IGUALES	5					HAY HOMOGENEIDAD	5
						MEDIAS DIFERENTES	4					NO HAY HOMOGENEIDAD	4

Continuación del cuadro 30.

MES: JULIO

ESTACION	MEDIA HISTORICA	MEDIA GENERADA	Tc	Tt	¿ Tc <Tt?	¿MEDIA HISTORICA ES IGUAL A LA MEDIA GENERADA?	VARIANZA HISTORICA	VARIANZA GENERADA	Fc	Ft	¿Fc<Ft?	¿VARIANZA HISTORICA HISTORICA ES IGUAL A LA VARIANZA GENERADA?	
QUEROCOCHA	0.47	0.47	0.451	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.018	0.052	2.902	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD	
OLLEROS	1.83	1.83	-6.506	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	0.244	0.349	1.427	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
QUILLCAY	3.06	3.06	-1.002	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.695	1.159	1.668	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
CHANCOS	4.07	4.07	-0.726	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	1.256	1.196	1.050	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
LLANGANUCO	2.03	2.03	2.006	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	0.211	0.655	3.100	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD	
PARON	1.75	1.75	1.464	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.964	0.450	2.140	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD	
COLCAS	3.22	3.31	0.122	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	1.539	0.525	2.934	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD	
LOS CEDROS	2.23	2.25	2.803	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	0.148	0.195	1.320	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
QUITARACSA	5.83	5.83	2.905	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	1.975	1.843	1.072	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
						MEDIAS IGUALES	5					HAY HOMOGENEIDAD	5
						MEDIAS DIFERENTES	4					NO HAY HOMOGENEIDAD	4

MES: AGOSTO

ESTACION	MEDIA HISTORICA	MEDIA GENERADA	Tc	Tt	¿ Tc <Tt?	¿MEDIA HISTORICA ES IGUAL A LA MEDIA GENERADA?	VARIANZA HISTORICA	VARIANZA GENERADA	Fc	Ft	¿Fc<Ft?	¿VARIANZA HISTORICA HISTORICA ES IGUAL A LA VARIANZA GENERADA?	
QUEROCOCHA	0.46	0.55	0.207	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.016	0.249	15.944	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD	
OLLEROS	1.97	2.88	-5.034	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	0.305	0.555	1.818	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD	
QUILLCAY	3.42	4.06	0.717	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.897	0.882	1.017	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
CHANCOS	4.25	4.71	-0.166	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.991	1.387	1.400	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
LLANGANUCO	2.01	2.14	0.079	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.196	0.900	4.586	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD	
PARON	2.12	2.00	2.224	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	1.448	0.681	2.126	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD	
COLCAS	3.23	3.85	-0.117	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	1.531	0.645	2.373	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD	
LOS CEDROS	2.46	2.09	2.737	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	0.474	0.285	1.661	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
QUITARACSA	5.53	6.03	1.386	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	2.733	1.539	1.776	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD	
						MEDIAS IGUALES	6					HAY HOMOGENEIDAD	3
						MEDIAS DIFERENTES	3					NO HAY HOMOGENEIDAD	6

Continuación del cuadro 30.

MES: SETIEMBRE

ESTACION	MEDIA HISTORICA	MEDIA GENERADA	Tc	Tt	¿ Tc <Tt?	¿MEDIA HISTORICA ES IGUAL A LA MEDIA GENERADA?	VARIANZA HISTORICA	VARIANZA GENERADA	Fc	Ft	¿Fc<Ft?	¿VARIANZA HISTORICA HISTORICA ES IGUAL A LA VARIANZA GENERADA?	
QUEROCOCHA	0.64	0.67	-0.01	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.038	0.170	4.487	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD	
OLLEROS	2.53	3.02	-2.61	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	0.383	0.497	1.300	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
QUILLCAY	3.93	4.44	0.623	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	1.054	0.943	1.117	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
CHANCOS	4.97	4.96	1.668	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	1.268	1.044	1.214	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
LLANGANUCO	1.98	1.92	0.386	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.245	0.603	2.457	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD	
PARON	1.56	1.74	0.935	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.727	0.825	1.135	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
COLCAS	3.28	4.15	-0.99	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	2.325	0.622	3.737	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD	
LOS CEDROS	2.40	2.15	0.943	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.329	0.357	1.085	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
QUITARACSA	6.01	6.51	1.463	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	2.022	2.150	1.064	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
						MEDIAS IGUALES	7					HAY HOMOGENEIDAD	6
						MEDIAS DIFERENTES	2					NO HAY HOMOGENEIDAD	3

MES: OCTUBRE

ESTACION	MEDIA HISTORICA	MEDIA GENERADA	Tc	Tt	¿ Tc <Tt?	¿MEDIA HISTORICA ES IGUAL A LA MEDIA GENERADA?	VARIANZA HISTORICA	VARIANZA GENERADA	Fc	Ft	¿Fc<Ft?	¿VARIANZA HISTORICA HISTORICA ES IGUAL A LA VARIANZA GENERADA?	
QUEROCOCHA	1.13	1.09	0.100	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.111	0.186	1.674	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
OLLEROS	3.98	4.18	-0.064	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	1.207	1.035	1.166	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
QUILLCAY	5.57	5.87	1.026	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	1.408	1.738	1.234	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
CHANCOS	7.31	6.71	2.630	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	5.166	1.422	3.632	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD	
LLANGANUCO	2.34	2.19	0.275	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.248	0.617	2.485	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD	
PARON	1.42	1.73	-0.180	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.216	0.757	3.509	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD	
COLCAS	4.18	5.61	-2.273	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	3.030	1.004	3.019	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD	
LOS CEDROS	2.84	2.78	-1.106	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.370	0.458	1.238	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
QUITARACSA	8.24	8.55	0.258	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	4.590	4.008	1.145	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD	
						MEDIAS IGUALES	7					HAY HOMOGENEIDAD	5
						MEDIAS DIFERENTES	2					NO HAY HOMOGENEIDAD	4

Continuación del cuadro 30.

MES: NOVIEMBRE

ESTACION	MEDIA HISTORICA	MEDIA GENERADA	Tc	Tt	¿ Tc <Tt?	¿MEDIA HISTORICA ES IGUAL A LA MEDIA GENERADA?	VARIANZA HISTORICA	VARIANZA GENERADA	Fc	Ft	¿Fc<Ft?	¿VARIANZA HISTORICA HISTORICA ES IGUAL A LA VARIANZA GENERADA?
QUEROCOCHA	1.60	1.63	-0.184	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.440	0.238	1.847	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD
OLLEROS	5.15	4.92	0.667	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	2.550	2.028	1.258	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD
QUILLCAY	7.72	7.05	2.694	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	3.438	5.920	1.722	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD
CHANCOS	8.50	7.70	2.149	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	7.765	3.674	2.114	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD
LLANGANUCO	2.99	2.88	-0.012	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.259	0.495	1.912	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD
PARON	1.64	2.23	-0.598	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.295	0.669	2.266	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD
COLCAS	5.21	6.67	-3.310	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	2.940	1.672	1.758	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD
LOS CEDROS	3.16	3.28	-2.278	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	0.521	0.875	1.679	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD
QUITARACSA	9.37	10.00	-1.458	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	2.511	6.004	2.391	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD
						MEDIAS IGUALES	5				HAY HOMOGENEIDAD	2
						MEDIAS DIFERENTES	4				NO HAY HOMOGENEIDAD	7

MES: DICIEMBRE

ESTACION	MEDIA HISTORICA	MEDIA GENERADA	Tc	Tt	¿ Tc <Tt?	¿MEDIA HISTORICA ES IGUAL A LA MEDIA GENERADA?	VARIANZA HISTORICA	VARIANZA GENERADA	Fc	Ft	¿Fc<Ft?	¿VARIANZA HISTORICA HISTORICA ES IGUAL A LA VARIANZA GENERADA?
QUEROCOCHA	2.11	2.05	0.268	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.913	0.272	3.350	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD
OLLEROS	5.85	5.91	0.255	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	3.548	2.376	1.493	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD
QUILLCAY	9.22	8.27	2.684	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	8.686	4.293	2.024	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD
CHANCOS	10.15	9.14	2.721	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	10.427	5.404	1.929	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD
LLANGANUCO	3.52	3.47	0.007	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.367	0.720	1.961	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD
PARON	1.94	2.61	-0.775	1.665	SI	MEDIAS IGUALES	0.398	0.626	1.573	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD
COLCAS	6.34	7.36	-1.883	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	3.369	4.435	1.317	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD
LOS CEDROS	3.63	3.45	-2.738	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	1.116	1.353	1.213	1.704	SI	HAY HOMOGENEIDAD
QUITARACSA	10.44	11.24	-1.877	1.665	NO	MEDIAS DIFERENTES	11.236	5.077	2.213	1.704	NO	NO HAY HOMOGENEIDAD
						MEDIAS IGUALES	4				HAY HOMOGENEIDAD	4
						MEDIAS DIFERENTES	5				NO HAY HOMOGENEIDAD	5

RESUMEN TOTAL

DESCRIPCION	MES	%
RESUMEN TOTAL	108	100
MEDIAS IGUALES	67	62
MEDIAS DIFERENTES	41	38

RESUMEN TOTAL

DESCRIPCION	MES	%
RESUMEN TOTAL	108	100
HAY HOMOGENEIDAD	63	58
NO HAY HOMOGENEIDAD	45	42

#### **4 Validación estadística o selección del modelo adecuado**

Según los resultados que se observan en el cuadro 22 se define al modelo estocástico PARMA (1,0) o el modelo periódico autorregresivo de orden 1 PAR(1) como modelo regional adecuado para la serie de caudales medios mensuales del río Santa, porque da el menor valor de SIC en la mayoría de los meses de las 9 estaciones de aforo. En el mes de marzo en las 9 estaciones el modelo adecuado es PARMA(1,0) y en el mes de julio el modelo PARMA (1,0) es válido en 4 estaciones; sin embargo es el modelo que se adecúa en la mayoría de las estaciones.

#### **5 Evaluación del modelo seleccionado PAR(1)**

Los resultados del cuadro 25 indican que:

- La media de los residuos es igual a cero en el 94 % de las 108 pruebas.
- El resultado de las pruebas de correlación de los residuos de las 108 pruebas demuestran que el 86% de los residuos no está correlacionado.
- El resultado de las pruebas de normalidad de los residuos señala que el 50% se distribuye normalmente con media cero y variancia constante.

Por la cuantificación de resultados obtenidos con el modelo PAR(1) de los residuos de los caudales mensuales se observa que hay un comportamiento de ruido blanco, que es una condición para definir el modelo adecuado en modelos dinámicos, porque en la mayoría de los meses los residuos generados con el modelo PAR(1) en diferentes estaciones de aforo de la cuenca del río Santa, tienen media cero; no son autocorrelacionados y tienen distribución normal.

#### **6 Generación de caudales mensuales con el modelo PAR (1) en los afluentes del río Santa**

Las ecuaciones mostradas del (111) al (122), son ecuaciones de modelos periódicos autorregresivos de orden 1 representados por PAR(1).

#### **7 Verificación de la bondad de ajuste del modelo estocástico PAR (1)**

Según los resultados encontrados, en el cuadro 26 la prueba de medias indica que las medias de descargas mensuales históricas y generadas con el modelo PAR(1) son iguales estadísticamente en 67 % de 108 valores comparados. Los resultados encontrados en la prueba

de homogeneidad de variancias de las descargas mensuales históricas y generadas con el modelo PAR(1) en la cuenca del río Santa son homogéneas en 91% de 108 valores comparados.

Como las medias y las variancias de las descargas mensuales de los datos históricos y generados son estadísticamente iguales en la mayoría de las pruebas estadísticas; entonces se concluye que el modelo estocástico PAR (1) es adecuado para modelar los caudales mensuales en los diferentes ríos aforados de la cuenca del Santa.

## **8 Regionalización de los parámetros del modelo estocástico periódico PAR (1) de los caudales mensuales en la cuenca del río Santa**

Los parámetros regionalizados son: la descarga media mensual  $\mu_t$  y el parámetro autorregresivo  $\phi_{1,t}$  y la variancia del error  $\sigma_{\varepsilon,t}^2$  de los modelos dados en las ecuaciones del (100) al (111).

### **8.1 Regionalización de la descarga media mensual en la cuenca del río Santa $\mu_t$**

Las cuencas en estudio son los afluentes ubicados en la Cordillera Blanca del río Santa y presentan una correlación significativa porque se tiene:  $r_c > r_t$ , por lo tanto el caudal medio mensual ( $\mu$  mensual regional) se puede estimar mediante las ecuaciones indicadas en el cuadro 27.

### **8.2 Regionalización del parámetro $\phi_{1,t}$ del modelo PAR (1) de los caudales medias mensuales en la cuenca del río Santa**

En la regionalización del parámetro  $\phi_{1,t}$  no se ha encontrado correlación significativa de  $\phi_{1,t}$  con los parámetros físicos de las cuencas, por lo tanto se ha estimado para la cuenca del río Santa el promedio de los valores de  $\phi_{1,t}$  mensual cuyos valores se muestran en el cuadro 24.

### **8.3 Regionalización de la desviación estándar del error $S_t$**

En la correlación de la desviación estándar del error del modelo PAR(1) con el área de la cuenca y el porcentaje del área glaciar se ha obtenido resultados significativos porque  $r_c > r_t$ , en los meses de setiembre a julio, por lo tanto es que en estos meses la desviación estándar del error regional  $S_{v,t}$  se puede estimar mediante las ecuaciones indicadas en el cuadro 28. En el mes de agosto la desviación estándar en la cuenca del río Santa es 0.5, es decir es independiente del tamaño de la cuenca y del porcentaje de glaciares, porque no existe

correlación significativa con estos parámetros. La desviación estándar del error sirve para calcular los valores de la variable aleatoria  $\varepsilon_{v,t}$ ,

## **9 Modelo estocástico regional de las descargas medias mensuales ( $\mu_{v,t}$ ) de la cuenca del río Santa**

En el cuadro 29 se observa los modelos regionales de las descargas medias mensuales en la cuenca del río Santa, y estos modelos regionales por mes están en función del área de la cuenca, del porcentaje de glaciares y de la variable aleatoria.

## **10 Verificación de la bondad de ajuste del modelo regional de las descargas medias mensuales**

Según estos resultados mostrados en el cuadro 30, en la mayoría de las estaciones se obtienen medias iguales y variancias homogéneas entre los datos históricos y los datos generados y, por lo tanto, las ecuaciones del cuadro 29 son adecuadas para generar caudales mensuales en la cuenca del río Santa.

Los resultados encontrados en la prueba de medias indican que las medias de descargas medias mensuales históricas y generadas con el modelo regional son iguales estadísticamente en 67 % de 108 valores comparados. Los resultados encontrados en la prueba de homogeneidad de variancias de las descargas medias mensuales históricas y generadas con el modelo regional en la cuenca del río Santa son homogéneas en 63% de 108 valores comparados.

Por consiguiente, acorde con los resultados obtenidos en el cuadro 30, la generación de caudales mensuales en cualquier parte de la cuenca se obtiene reemplazando el área (A) de la cuenca y el área glaciar en porcentaje (G), en las ecuaciones del cuadro 29. Al aplicar la ecuación del cuadro 29, también se debe generar la variable aleatoria de distribución normal estándar independiente ( $\varepsilon_{v,t}$ ).

### **4.2.3 ANÁLISIS DE INCERTIDUMBRE**

#### **a. Resultados**

El análisis de incertidumbre se ha efectuado para las descargas promedios anuales de las estaciones en estudio: Querococha, Olleros, Quillcay, Chancos, Llanganuco, Parón, Colcas y Quitaraca. La incertidumbre se ha evaluado mediante la simulación de Monte Carlo, que ha permitido visualizar la función de densidad de probabilidades, la función de distribución



acumulada. La simulación de Monte Carlo se ha efectuado para 2000 iteraciones. Los resultados obtenidos se muestran en las figuras del 22 al 30.

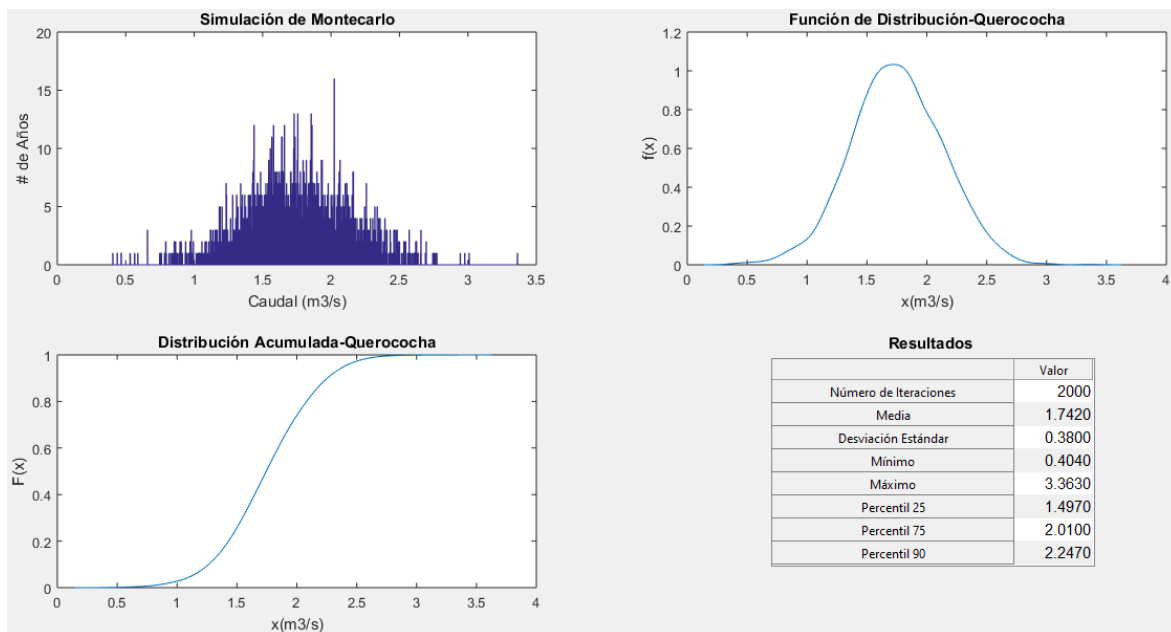


Figura 22: Simulación de Monte Carlo de las descargas medias anuales generadas con el modelo ARMA (1,0) de la estación Querococha

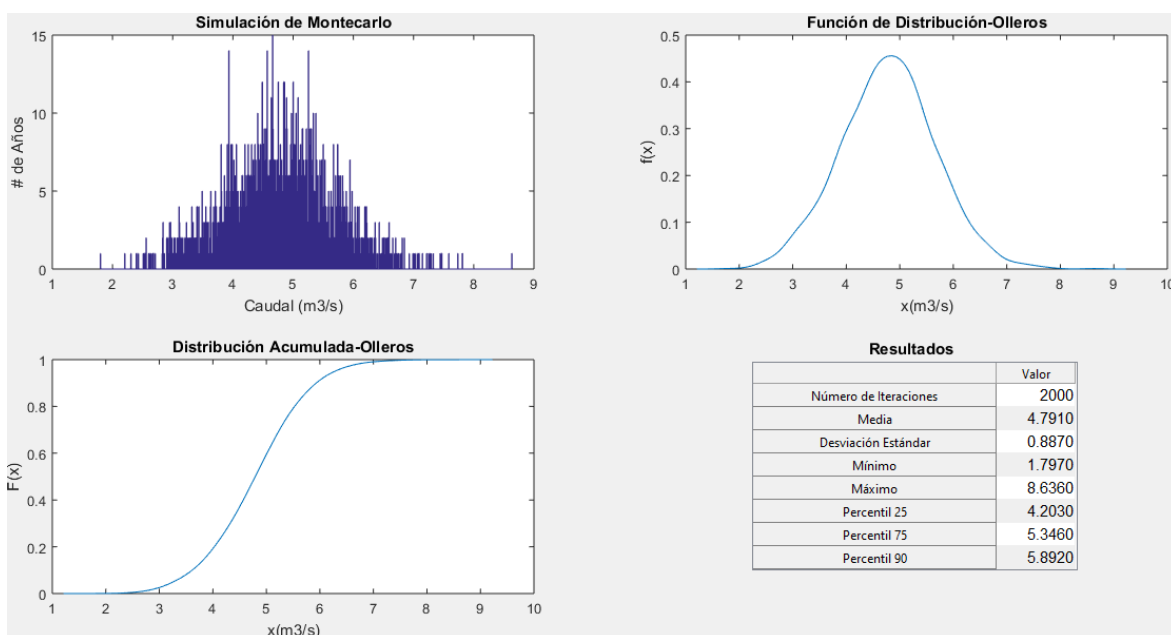


Figura 23: Simulación de Monte Carlo de las descargas medias anuales generadas con el modelo ARMA (1,0) de la estación Olleros.

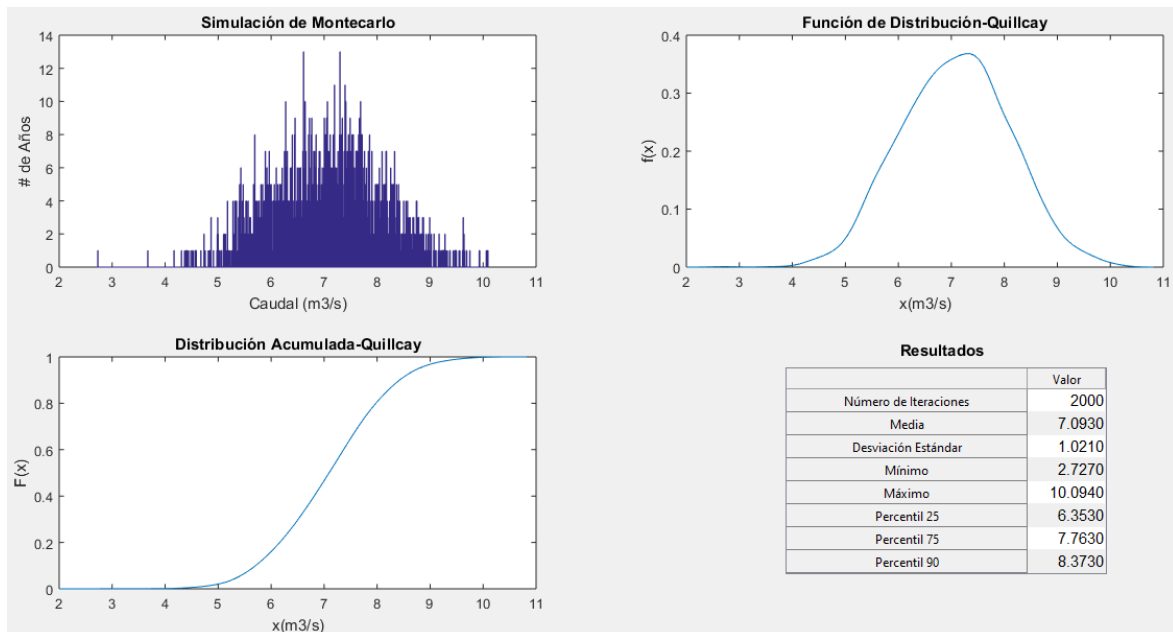


Figura 24: Simulación de Monte Carlo de las descargas medias anuales generadas con el modelo ARMA (1,0) de la estación Quillcay.

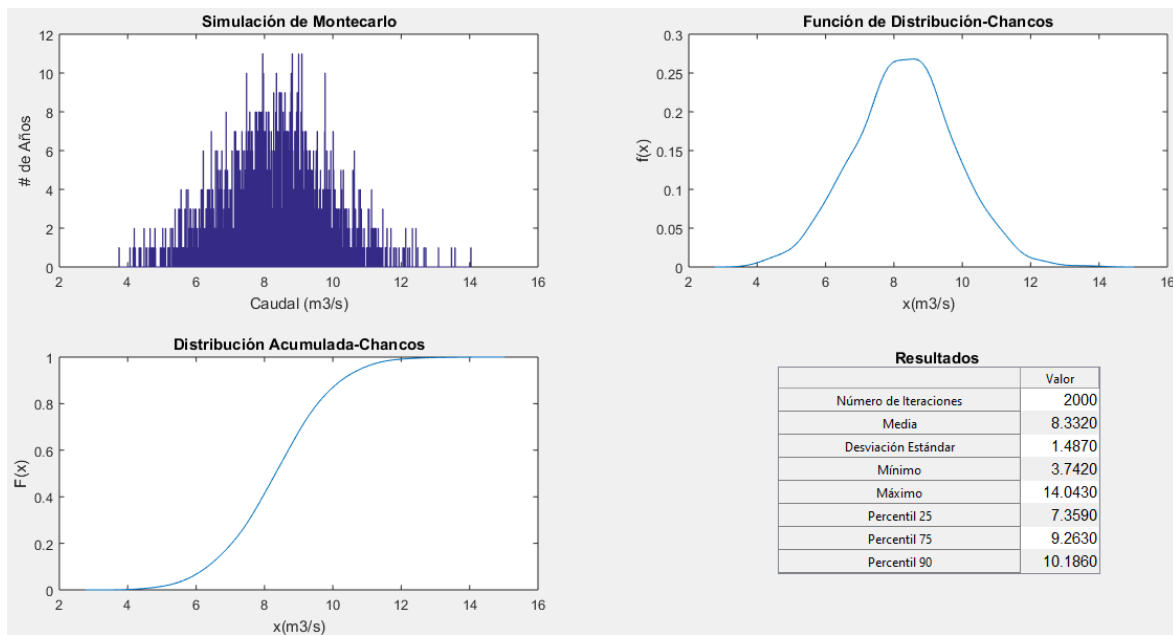


Figura 25: Simulación de Monte Carlo de las descargas medias anuales generadas con el modelo ARMA (1,0) de la estación Chancos.

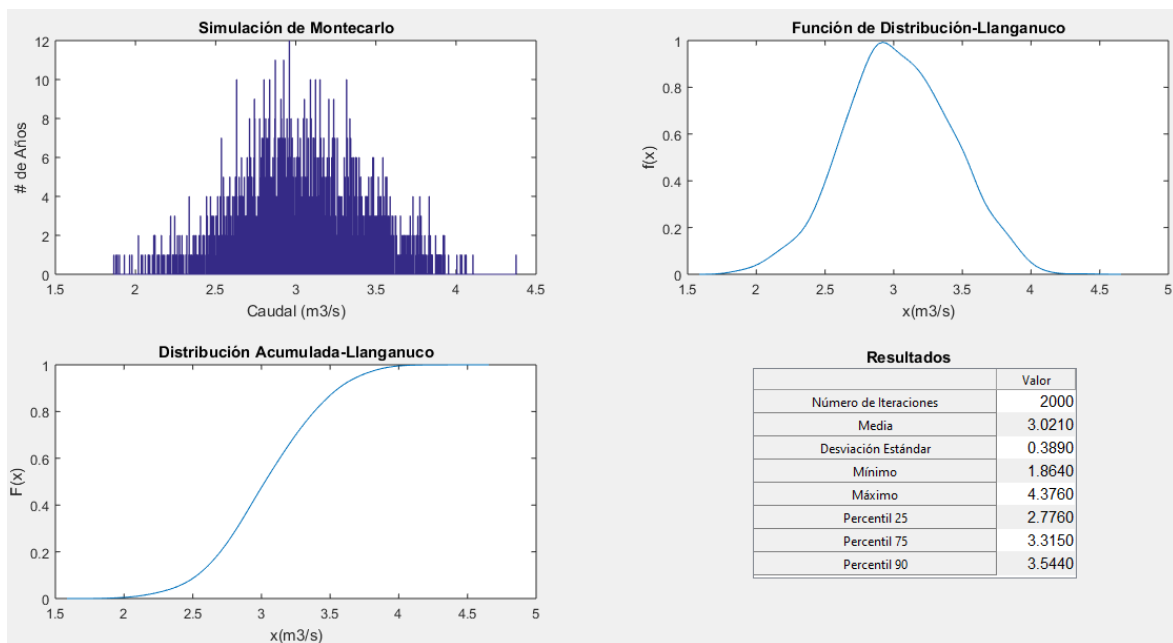


Figura 26: Simulación de Monte Carlo de las descargas medias anuales generadas con el modelo ARMA (1,0) de la estación Llanganuco.

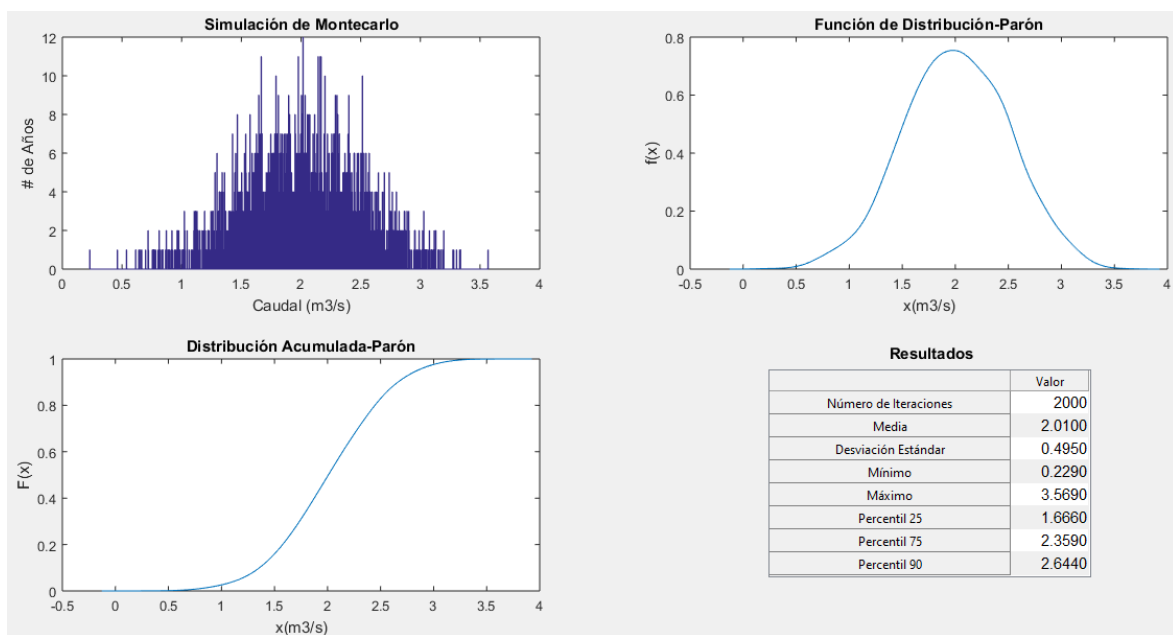


Figura 27: Simulación de Monte Carlo de las descargas medias anuales generadas con el modelo ARMA (1,0) de la estación Parón.

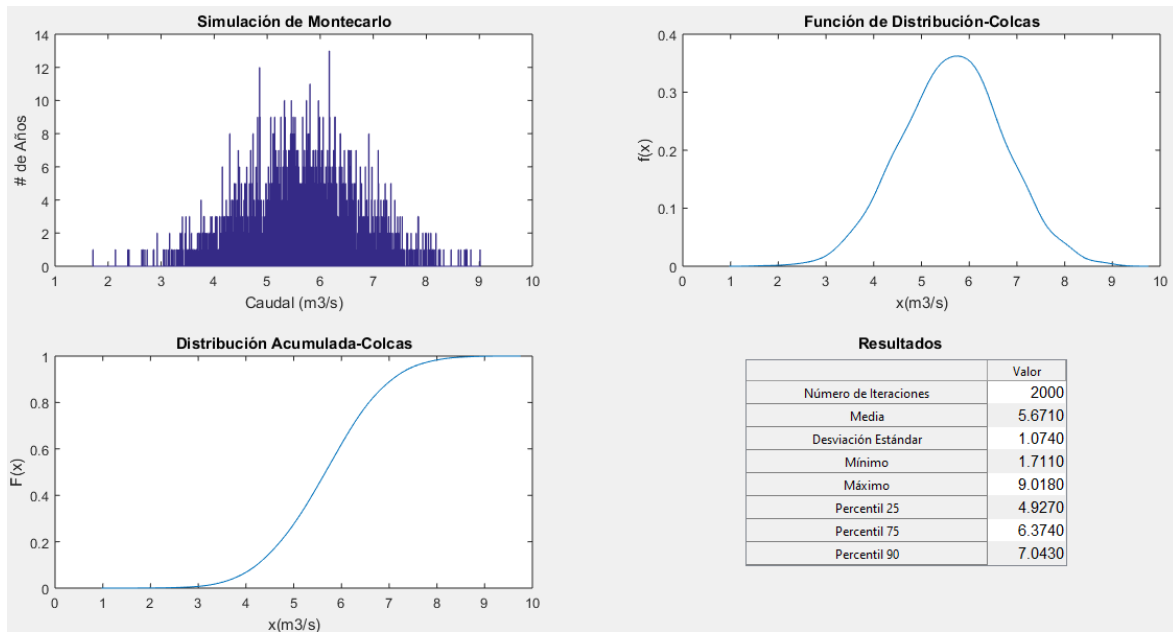


Figura 28: Simulación de Monte Carlo de las descargas medias anuales generadas con el modelo ARMA (1,0) de la estación Colcas.

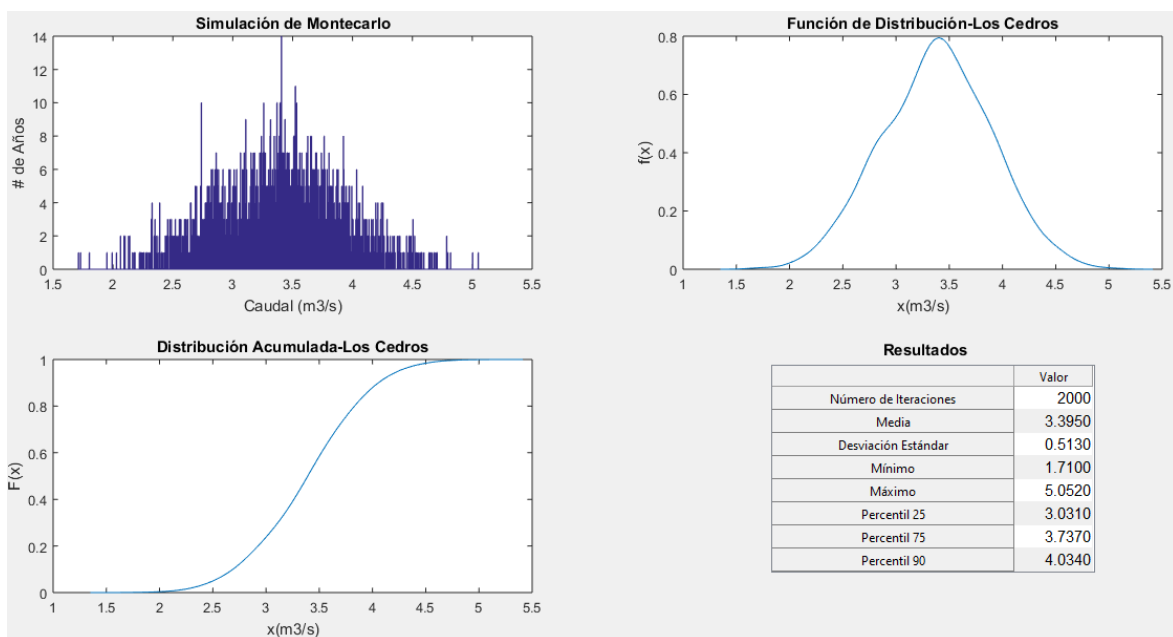


Figura 29: Simulación de Monte Carlo de las descargas medias anuales generadas con el modelo ARMA (1,0) de la estación Los Cedros.

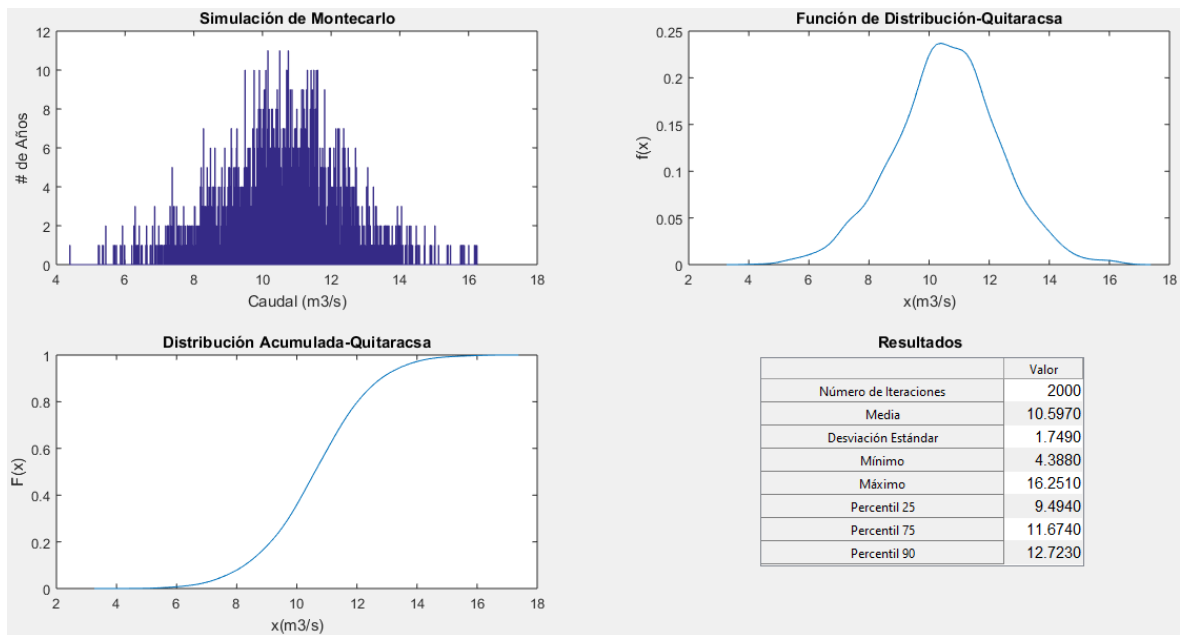


Figura 30: Simulación de Monte Carlo de las descargas medias anuales generadas con el modelo ARMA (1,0) de la estación Quitaraca

Mediante la técnica de diagrama de caja se ha obtenido la variación de los parámetros: media, desviación estándar, coeficiente de variación y  $(\phi_1)$ . Los resultados se muestran en las figuras del 31 al 39 y en los cuadros del 31 al 39.

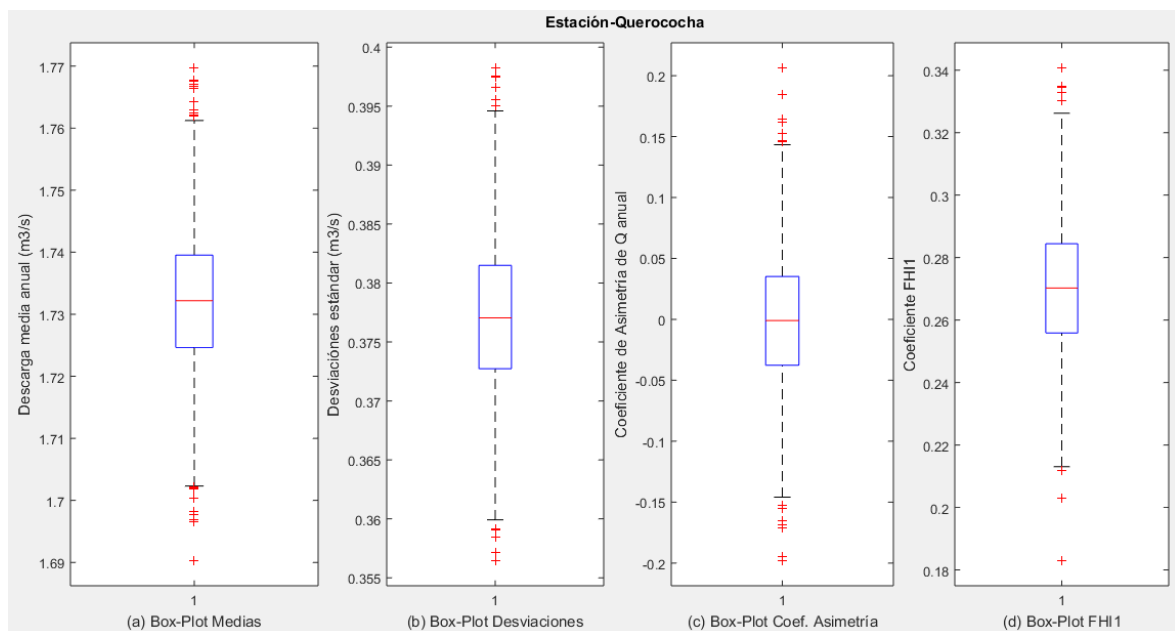


Figura 31: Diagrama de caja de las descargas medias anuales, desviación estándar, coeficiente de sesgo y del parámetro  $(\phi_1)$  de la estación Querococha.

Cuadro 31: Parámetros de las descargas media anuales generadas con el modelo AR(1). Estación Querococha

Medias Anuales		Desviaciones Estándar	
	Valor		Valor
Número de Iteraciones	4000000	Número de Iteraciones	4000000
Media	1.7330	Media	0.3770
Mínimo	1.6900	Mínimo	0.3560
Máximo	1.7680	Máximo	0.3980
Percentil 25	1.7260	Percentil 25	0.3730
Percentil 75	1.7400	Percentil 75	0.3820
Percentil 90	1.7470	Percentil 90	0.3850

Coeficientes de Asimetría		Coeficiente FHI1	
	Valor		Valor
Número de Iteraciones	4000000	Número de Iteraciones	4000000
Media	0.0030	Media	0.2700
Mínimo	-0.1750	Mínimo	0.1980
Máximo	0.1580	Máximo	0.3530
Percentil 25	-0.0350	Percentil 25	0.2570
Percentil 75	0.0390	Percentil 75	0.2840
Percentil 90	0.0720	Percentil 90	0.2960

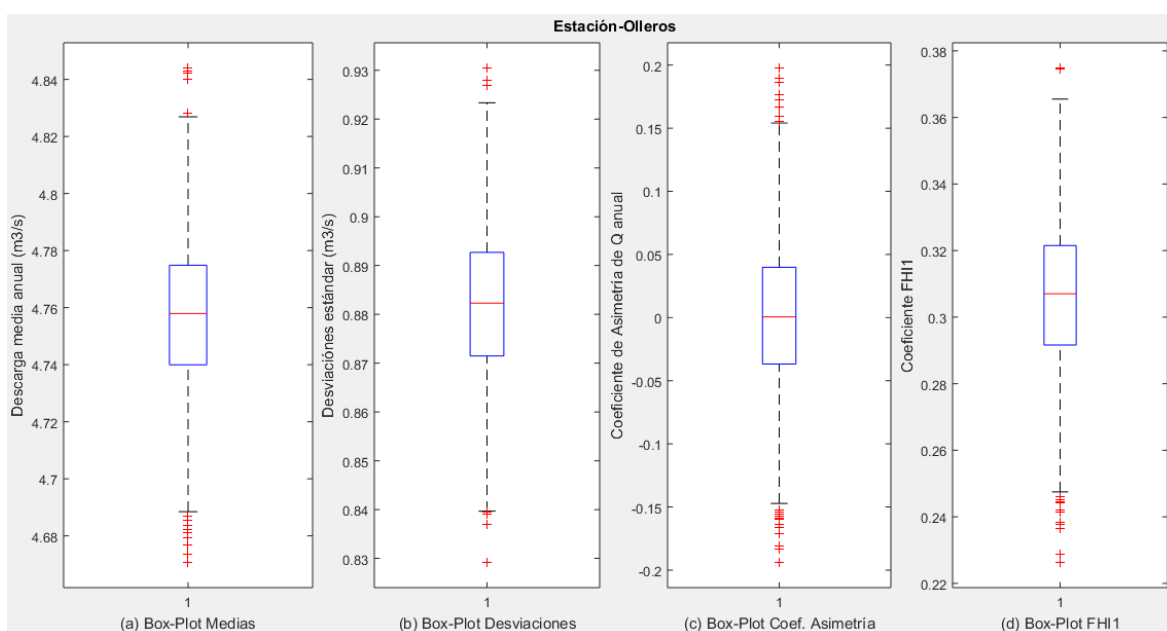


Figura 32: Diagrama de caja de las descargas medias anuales, desviación estándar, coeficiente de sesgo y del parámetro ( $\phi_1$ ) de la estación Olleros.

Cuadro 32: Parámetros de las descargas media anuales generadas con el modelo AR(1). Estación Olleros

Medias Anuales		Desviaciones Estándar	
	Valor		Valor
Número de Iteraciones	4000000	Número de Iteraciones	4000000
Media	4.7580	Media	0.8820
Mínimo	4.6590	Mínimo	0.8290
Máximo	4.8470	Máximo	0.9430
Percentil 25	4.7410	Percentil 25	0.8720
Percentil 75	4.7760	Percentil 75	0.8930
Percentil 90	4.7920	Percentil 90	0.9020

Coeficientes de Asimetría		Coeficiente FHI1	
	Valor		Valor
Número de Iteraciones	4000000	Número de Iteraciones	4000000
Media	0	Media	0.3080
Mínimo	-0.2310	Mínimo	0.2320
Máximo	0.1840	Máximo	0.3820
Percentil 25	-0.0410	Percentil 25	0.2930
Percentil 75	0.0350	Percentil 75	0.3210
Percentil 90	0.0710	Percentil 90	0.3330

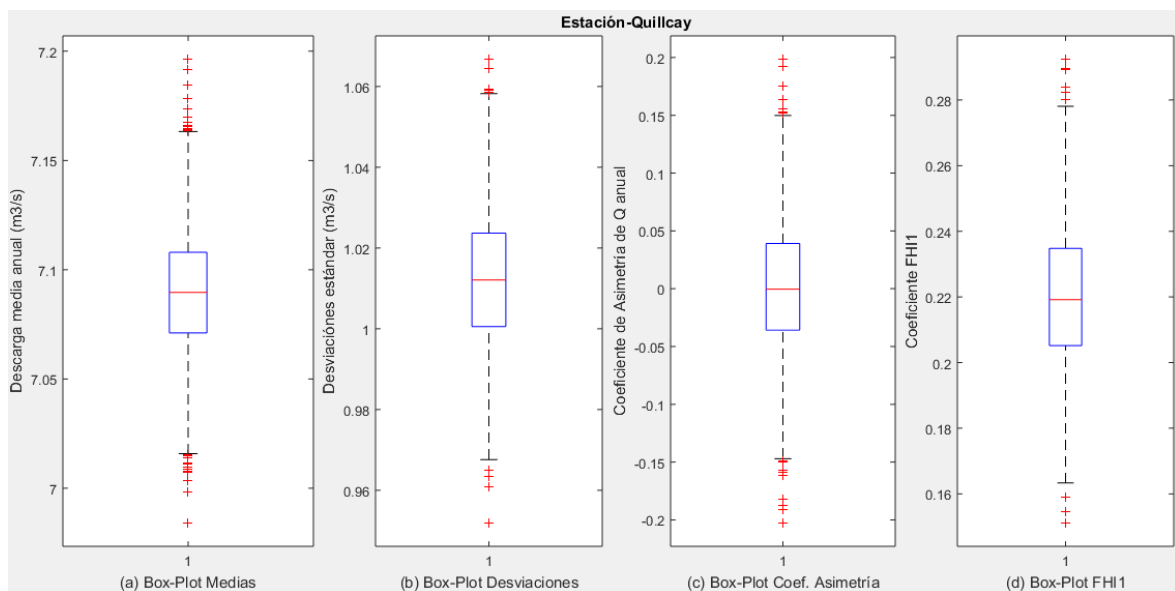


Figura 33: Diagrama de caja de las descargas medias anuales, desviación estándar, coeficiente de sesgo y del parámetro ( $\phi_1$ ) de la estación Quillcay.

Cuadro 33: Parámetros de las descargas media anuales generadas con el modelo AR(1). Estación Quillcay

Medias Anuales		Desviaciones Estándar	
	Valor		Valor
Número de Iteraciones	4000000	Número de Iteraciones	4000000
Media	7.0900	Media	1.0120
Mínimo	6.9840	Mínimo	0.9520
Máximo	7.1960	Máximo	1.0670
Percentil 25	7.0710	Percentil 25	1.0010
Percentil 75	7.1080	Percentil 75	1.0240
Percentil 90	7.1270	Percentil 90	1.0330

Coeficientes de Asimetría		Coeficiente FHI1	
	Valor		Valor
Número de Iteraciones	4000000	Número de Iteraciones	4000000
Media	0	Media	0.2190
Mínimo	-0.2030	Mínimo	0.1510
Máximo	0.1990	Máximo	0.2920
Percentil 25	-0.0360	Percentil 25	0.2050
Percentil 75	0.0390	Percentil 75	0.2350
Percentil 90	0.0750	Percentil 90	0.2490

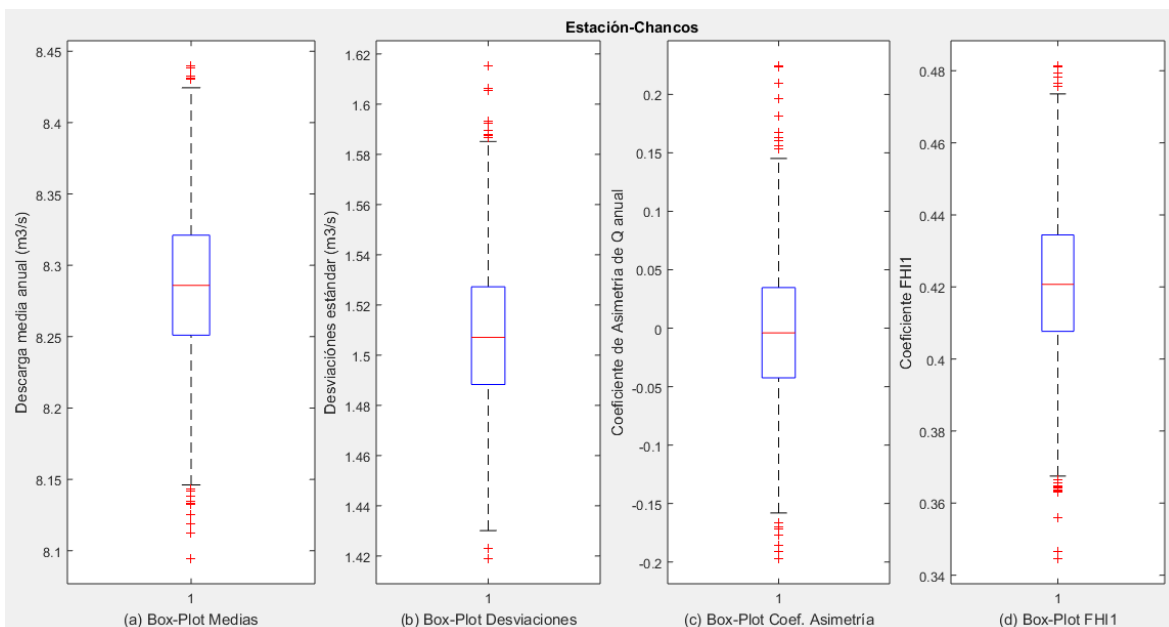


Figura 34: Diagrama de caja de las descargas medias anuales, desviación estándar, coeficiente de sesgo y del parámetro ( $\phi_1$ ) de la estación Chancos.



Cuadro 34: Parámetros de las descargas media anuales generadas con el modelo AR(1). Estación Chancos

Medias Anuales		Desviaciones Estándar	
	Valor		Valor
Número de Iteraciones	4000000	Número de Iteraciones	4000000
Media	8.2860	Media	1.5070
Mínimo	8.0940	Mínimo	1.4190
Máximo	8.4400	Máximo	1.6150
Percentil 25	8.2510	Percentil 25	1.4880
Percentil 75	8.3210	Percentil 75	1.5270
Percentil 90	8.3570	Percentil 90	1.5450

Coeficientes de Asimetría		Coeficiente FHI1	
	Valor		Valor
Número de Iteraciones	4000000	Número de Iteraciones	4000000
Media	0	Media	0.4210
Mínimo	-0.1980	Mínimo	0.3440
Máximo	0.2250	Máximo	0.4810
Percentil 25	-0.0430	Percentil 25	0.4080
Percentil 75	0.0350	Percentil 75	0.4340
Percentil 90	0.0700	Percentil 90	0.4460

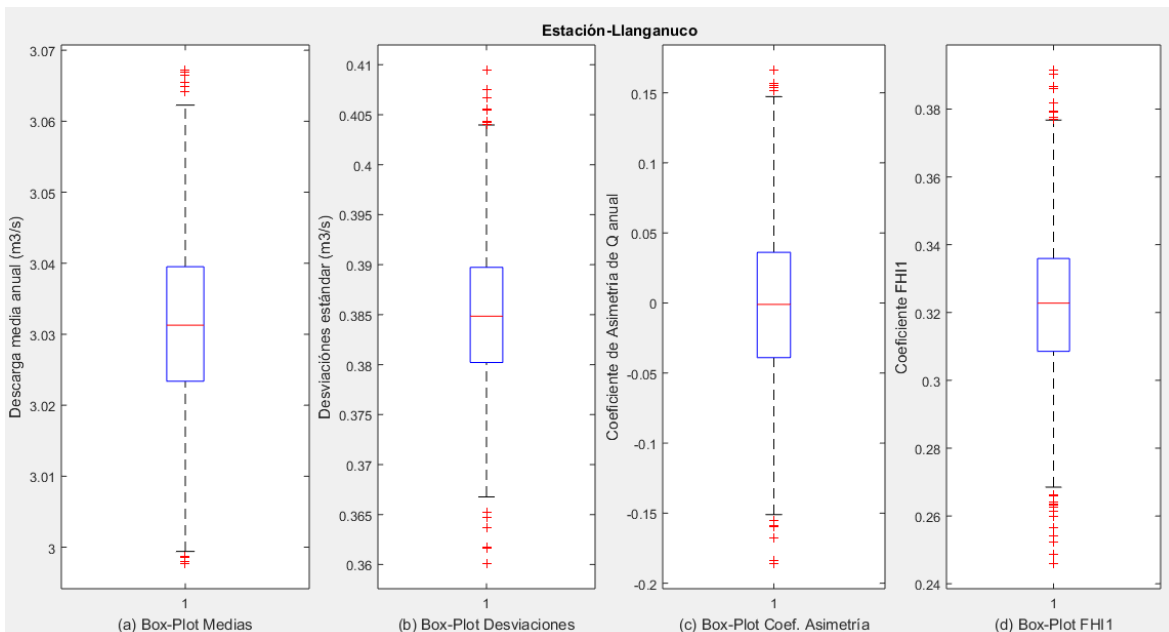


Figura 35: Diagrama de caja de las descargas medias anuales, desviación estándar, coeficiente de sesgo y del parámetro ( $\phi_1$ ) de la estación Llanganuco

Cuadro 35: Parámetros de las descargas media anuales generadas con el modelo AR(1). Estación Llanganuco

Medias Anuales		Desviaciones Estándar	
	Valor		Valor
Número de Iteraciones	4000000	Número de Iteraciones	4000000
Media	3.0310	Media	0.3850
Mínimo	2.9980	Mínimo	0.3600
Máximo	3.0670	Máximo	0.4100
Percentil 25	3.0230	Percentil 25	0.3800
Percentil 75	3.0400	Percentil 75	0.3900
Percentil 90	3.0470	Percentil 90	0.3940

Coeficientes de Asimetría		Coeficiente FHI1	
	Valor		Valor
Número de Iteraciones	4000000	Número de Iteraciones	4000000
Media	0	Media	0.3230
Mínimo	-0.1860	Mínimo	0.2460
Máximo	0.1670	Máximo	0.3920
Percentil 25	-0.0390	Percentil 25	0.3090
Percentil 75	0.0360	Percentil 75	0.3360
Percentil 90	0.0690	Percentil 90	0.3500

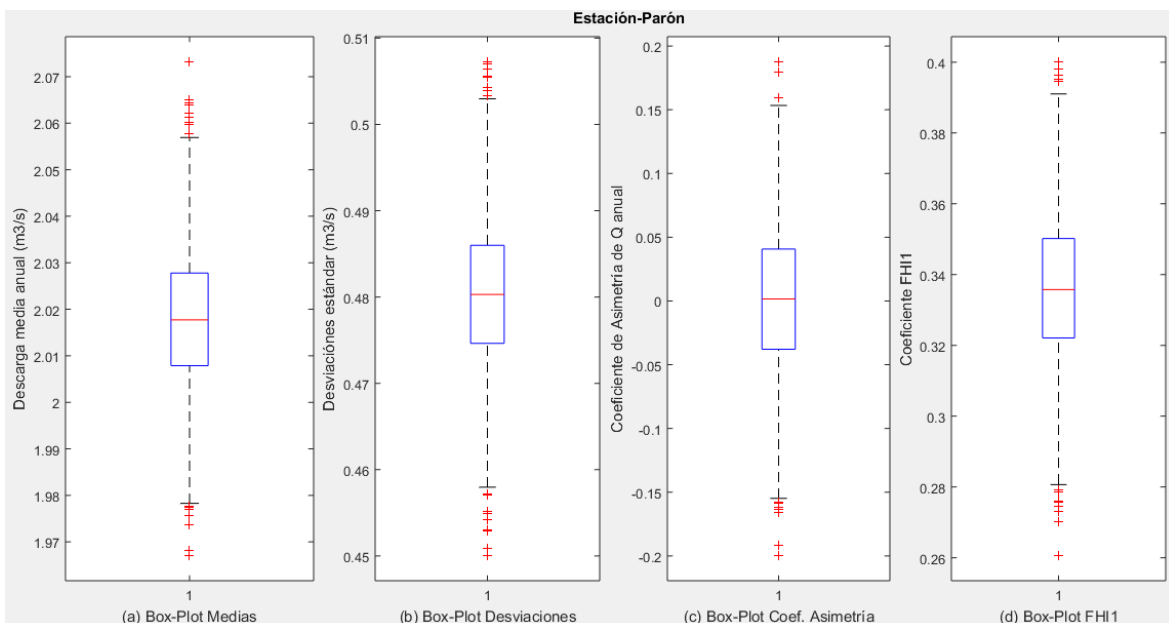


Figura 36: Diagrama de caja de las descargas medias anuales, desviación estándar, coeficiente de sesgo y del parámetro ( $\phi_1$ ) de la estación Parón.

Cuadro 36: Parámetros de las descargas media anuales generadas con el modelo AR(1). Estación Parón

Medias Anuales		Desviaciones Estándar	
	Valor		Valor
Número de Iteraciones	4000000	Número de Iteraciones	4000000
Media	2.0180	Media	0.4800
Mínimo	1.9670	Mínimo	0.4500
Máximo	2.0730	Máximo	0.5070
Percentil 25	2.0080	Percentil 25	0.4750
Percentil 75	2.0280	Percentil 75	0.4860
Percentil 90	2.0370	Percentil 90	0.4910

Coeficientes de Asimetría		Coeficiente FHI1	
	Valor		Valor
Número de Iteraciones	4000000	Número de Iteraciones	4000000
Media	0.0020	Media	0.3360
Mínimo	-0.2000	Mínimo	0.2600
Máximo	0.1880	Máximo	0.4000
Percentil 25	-0.0380	Percentil 25	0.3220
Percentil 75	0.0410	Percentil 75	0.3500
Percentil 90	0.0730	Percentil 90	0.3630

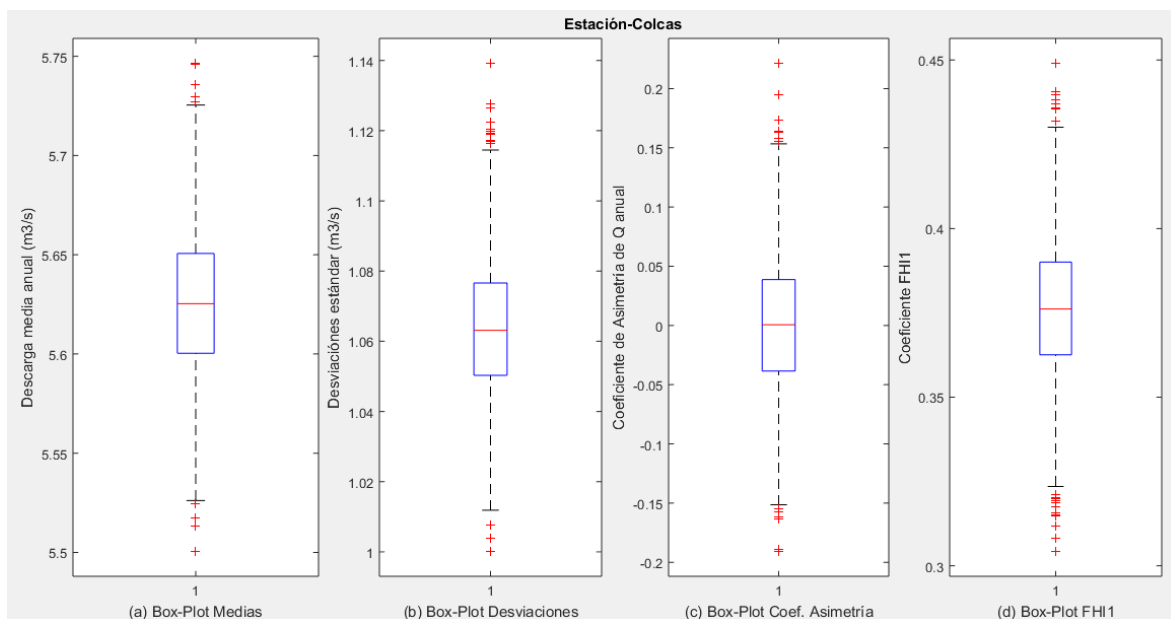


Figura 37: Diagrama de caja de las descargas medias anuales, desviación estándar, coeficiente de sesgo y del parámetro ( $\phi_1$ ) de la estación Colcas.

Cuadro 37: Parámetros de las descargas media anuales generadas con el modelo AR(1).  
Estación Colcas

Medias Anuales		Desviaciones Estándar	
	Valor		Valor
Número de Iteraciones	4000000	Número de Iteraciones	4000000
Media	5.6250	Media	1.0630
Mínimo	5.5000	Mínimo	1
Máximo	5.7470	Máximo	1.1390
Percentil 25	5.6000	Percentil 25	1.0500
Percentil 75	5.6510	Percentil 75	1.0770
Percentil 90	5.6710	Percentil 90	1.0900

Coeficientes de Asimetría		Coeficiente FHI1	
	Valor		Valor
Número de Iteraciones	4000000	Número de Iteraciones	4000000
Media	0	Media	0.3760
Mínimo	-0.1910	Mínimo	0.3040
Máximo	0.2220	Máximo	0.4490
Percentil 25	-0.0380	Percentil 25	0.3630
Percentil 75	0.0390	Percentil 75	0.3900
Percentil 90	0.0730	Percentil 90	0.4020

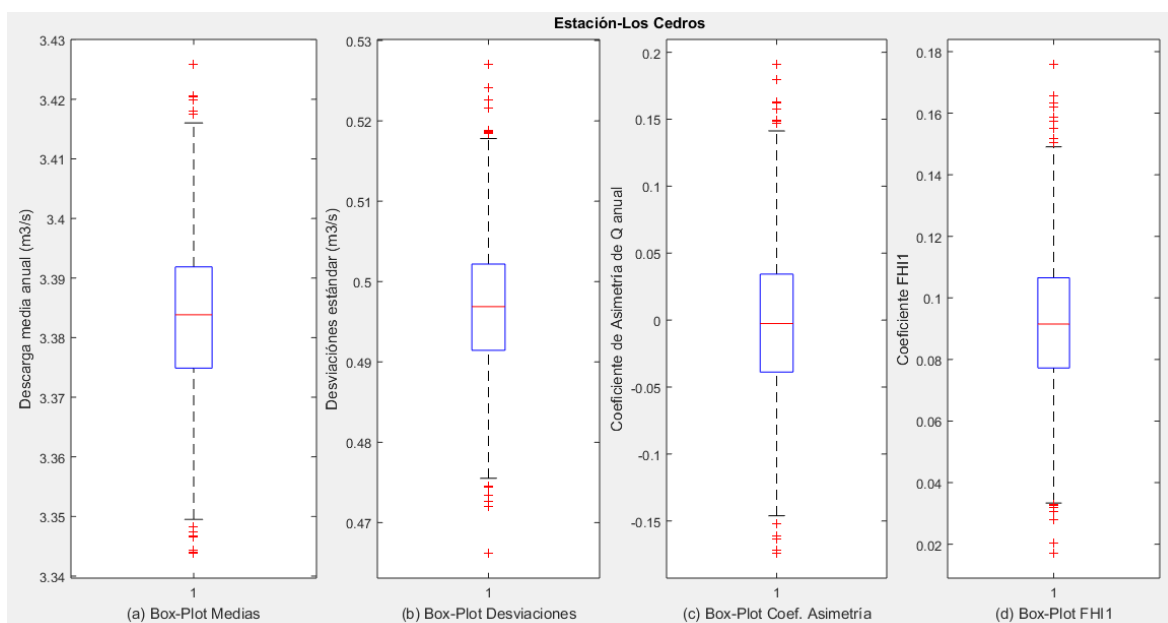


Figura 38: Diagrama de caja de las descargas medias anuales, desviación estándar, coeficiente de sesgo y del parámetro ( $\phi_1$ ) de la estación Los cedros.

Cuadro 38: Parámetros de las descargas media anuales generadas con el modelo AR(1). Estación Los cedros

Medias Anuales		Desviaciones Estándar	
	Valor		Valor
Número de Iteraciones	4000000	Número de Iteraciones	4000000
Media	3.3840	Media	0.4970
Mínimo	3.3440	Mínimo	0.4660
Máximo	3.4260	Máximo	0.5270
Percentil 25	3.3750	Percentil 25	0.4910
Percentil 75	3.3920	Percentil 75	0.5020
Percentil 90	3.3990	Percentil 90	0.5070

Coeficientes de Asimetría		Coeficiente FHI1	
	Valor		Valor
Número de Iteraciones	4000000	Número de Iteraciones	4000000
Media	0	Media	0.0920
Mínimo	-0.1740	Mínimo	0.0170
Máximo	0.1910	Máximo	0.1760
Percentil 25	-0.0390	Percentil 25	0.0770
Percentil 75	0.0340	Percentil 75	0.1070
Percentil 90	0.0680	Percentil 90	0.1180

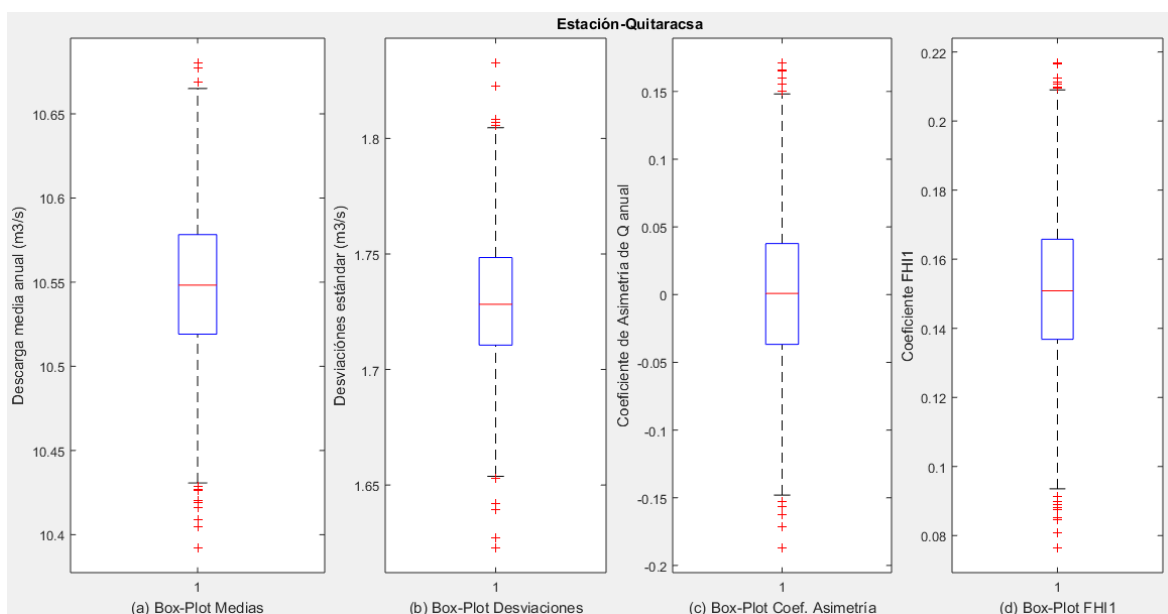


Figura 39: Diagrama de caja de las descargas medias anuales, desviación estándar, coeficiente de sesgo y del parámetro ( $\phi_1$ ) de la estación Quitaraca.

Cuadro 39: Parámetros de las descargas media anuales generadas con el modelo AR(1).  
Estación Quitaracsa

Medias Anuales		Desviaciones Estándar	
	Valor		Valor
Número de Iteraciones	4000000	Número de Iteraciones	4000000
Media	10.5480	Media	1.7280
Mínimo	10.3920	Mínimo	1.6230
Máximo	10.6800	Máximo	1.8330
Percentil 25	10.5190	Percentil 25	1.7110
Percentil 75	10.5780	Percentil 75	1.7480
Percentil 90	10.6050	Percentil 90	1.7640

Coeficientes de Asimetría		Coeficiente FHI1	
	Valor		Valor
Número de Iteraciones	4000000	Número de Iteraciones	4000000
Media	0	Media	0.1510
Mínimo	-0.1870	Mínimo	0.0760
Máximo	0.1710	Máximo	0.2170
Percentil 25	-0.0370	Percentil 25	0.1370
Percentil 75	0.0380	Percentil 75	0.1660
Percentil 90	0.0700	Percentil 90	0.1790

## b. Discusión

Los datos generados mediante la simulación de Monte Carlo, con el modelo AR(1), en la cuenca del río Santa, son modelos de distribución normal en todas las estaciones de aforo estudiadas; esto indica que el modelo AR(1) es representativo para la zona en estudio porque genera datos de distribución normal e independiente. Esta forma de distribución se observa en las figuras del 22 al 30.

En la simulación de Monte Carlo se observa que de las dos mil iteraciones, el mínimo valor generado es todas las estaciones son no negativos, por lo tanto; el modelo es confiable.

En el diagrama de caja se observa de cuatro millones de iteraciones, la forma de distribución es la distribución normal porque el coeficiente de sesgo promedio es igual a cero en todas estaciones.

En los figuras del 31 al 39 y en los cuadros del 31 al 39 se observa que los coeficientes de asimetría presentan menor variación, mientras que el parámetro media tiene mayor variación.

Los valores medios de los parámetros ( $\phi_1$ ) encontrados mediante el diagrama de caja en los cuadros del 31 al 39 son iguales a los valores de ( $\phi_1$ ) encontrados con los datos observados que se muestran en el cuadro 11.

Los caudales máximos y mínimos de los datos generados con el modelo AR (1) mediante la simulación de Monte Carlo, y diagrama de caja y los caudales observados en el cuadro 12 son iguales, como se ha comprobado mediante la prueba de medias.

## V. CONCLUSIONES

- 1 El modelo estocástico adecuado para describir el comportamiento temporal de las descargas medias anuales en las subcuencas: Querococha, Olleros, Quillcay, Marcará, LLAGANUCO, Parón, Los cedros Colcas y Quitaracasa de la cuenca del río Santa es el modelo estocástico autorregresivo de orden 1 AR(1).
- 2 El modelo AR(1) generan caudales de distribución normal e independiente, los que se han comprobado mediante la prueba de normalidad y mediante la simulación de Monte Carlo.
- 3 Los caudales medios anuales se pueden generar mediante el modelo regional AR(1). Los parámetros de este modelo como la media  $\mu$  se estiman en función del área de la cuenca y del porcentaje del área glaciar. El parámetro  $\phi_1$  es independiente de los parámetros físicos de las cuencas en estudio.
- 4 La componente aleatoria  $\varepsilon_t$  se estima a partir de la desviación estándar del error del modelo AR(1) y esta variable aleatoria es de distribución normal con variancia constante igual a la varianza regional del ruido blanco.
- 5 El modelo estocástico adecuado para describir el comportamiento temporal de las descargas medias mensuales en la cuenca del río Santa es el modelo estocástico periódico autorregresivo de orden 1 PAR (1).
- 6 Los caudales medios mensuales se pueden generar mediante el modelo regional PARMA(1,0). Los parámetros mensuales de este modelo como la media  $\mu_t$  se estiman en función del área de la cuenca y del porcentaje del área glaciar. El parámetro  $\phi_{1,\tau}$  es independiente de los parámetros físicos de las cuencas.
- 7 La componente aleatoria  $\varepsilon_{v,t}$  de los modelos regionales por mes se estima a partir de la desviación estándar del error del modelo PAR(1) y esta variable aleatoria es de distribución normal con variancia constante igual a la varianza regional mensual del ruido blanco.
- 8 En la aplicación de modelos dinámicos AR(1) no se generan caudales negativos, esta característica se ha comprobado mediante la simulación de Monte Carlo y la técnica del diagrama de caja.



## **VI. RECOMENDACIONES**

- 1 Implementar programas de computación para sistematizar los modelos regionales de descargas medias anuales y mensuales.
- 2 Las ecuaciones regionales son aplicables para áreas de cuenca comprendidas entre 45 y 390 Km<sup>2</sup>.
- 3 Las ecuaciones regionales son aplicables para áreas de glaciares expresadas en porcentaje entre los límites entre 3% y 47%.
- 4 En el modelamiento estocástico considerar la variación del área glaciaria en el tiempo.
- 5 Para verificar la normalidad de los datos generados, se debe aplicar la simulación de Monte Carlo que es una técnica relativamente nueva en la hidrología.
- 6 Para verificar si con los modelos estocásticos se generan datos negativos de caudales se debe aplicar la técnica del diagrama de cajas.

## VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aliaga Araujo, SV. 1985. Hidrología Estadística. Lima, PE, Se. 328 p.
- ANA (Autoridad Nacional del Agua, PE). Unidad de Glaciología y Recursos Hídricos. 2011. Inventario de Glaciares Codillera Blanca. Lima, PE, Sinopsis Publicidad. 126 p.
- Bakieva, M.; García-Bellido, R.; González Such, J. y Jornet, J.M. (2010). Diagrama de Caja (en línea). Consultado 13 ene.2017. Disponible en: [http://www.uv.es/innomide/spss/SPSS/SPSS\\_0203d.pdf](http://www.uv.es/innomide/spss/SPSS/SPSS_0203d.pdf)
- Benedetti, M. 1981. Análisis descriptivo de datos. Modeling Hydrologic Time series from the Artic. (en línea). Consultado 18 mar. 2102. Disponible en: [www.halweb.uc3m.es/esp/Personal/personas/amalonso/esp./ielade-sl4.pdr](http://www.halweb.uc3m.es/esp/Personal/personas/amalonso/esp./ielade-sl4.pdr)
- Court Monteverde, E; Rengifo, E. (2011). Estadísticas y Economía Financiera. Buenos Aires, AR, Cengage learning. 589 p.
- Custodio, E; Llamas MR. 2001. Hidrología Subterránea. 2<sup>da</sup> ed. Omega. Barcelona. ES. 2 vols. 2350 p.
- Del Águila Ríos, S. 2001. Modelamiento Estocástico de las Descargas Medias del Río Santa-Ancash. Tesis M. Sc. Lima, PE. Universidad Nacional Agraria La Molina.
- Diebold, FX. 2001. Elementos de Pronósticos. México, MX. International Thomson Editores. 330 p.
- Ferriols, M; Alós M. 2011. Métodos de Análisis de Incertidumbre (en línea). Consultado 08 dic. 2016. Disponible en <http://www.elsevier.es/es-revista-farmacia-hospitalaria-121-articulo-metodos-analisis-incertidumbre-S1130634311700162>
- García Gutiérrez, FP. 2010. Modelación hidrológica Estocástica. Desarrollo de un Modelo de Generación Sintética de Series Temporales (en línea). Consultado en 30 mar. 2016.. Disponible en: [http://www.google.com.pe/#hl=es&gs\\_nf=1&cp=15&gs\\_id=3j&xhr=t&q=hidrologia+estocastica&pf=p&scient=psy-ab&oq=hidrologia+esto&gs\\_l=&pbx=1&bav=on.2,or.r\\_gc.r\\_pw.r\\_qf.&fp=628dfd5910c2dc28&biw=1600&bih=799](http://www.google.com.pe/#hl=es&gs_nf=1&cp=15&gs_id=3j&xhr=t&q=hidrologia+estocastica&pf=p&scient=psy-ab&oq=hidrologia+esto&gs_l=&pbx=1&bav=on.2,or.r_gc.r_pw.r_qf.&fp=628dfd5910c2dc28&biw=1600&bih=799).

- González Casimiro, MP. 2009. Análisis de series temporales: Modelos ARIMA. (en línea) Consultado 08 abr.2016. Disponible en: <https://addi.ehu.es/bitstream/10810/12492/1/04-09gon.pdf>
- Guevara Bellido, JE; Vega Gonzáles, CE; Guevara Pérez, E. 2010. Análisis Estocástico de una Serie Cronológica de caudales mensuales. Caso del estudio Río Caroní. Venezuela (en línea). Revista de ingeniería UC. Vol. 17. No.1 Abril 2010 46-54. Consultado 10 abr. 2016. Disponible en: [http://www.lamolina.edu.pe/investigacion/web/pdf/normas\\_iica-catie.pdf](http://www.lamolina.edu.pe/investigacion/web/pdf/normas_iica-catie.pdf)
- Gujarati, DN; Porter, DC. 2010. Econometría. 5<sup>ta</sup> ed. Editores, México, MX. MacGraw-Hill/Interamericana 921 p.
- Hernández Alonso, J. 2009. Análisis de series temporales económicas II. 2<sup>da</sup> ed. Madrid, ES, Esic Editorial. 98 p.
- Horque Ferro, S (2011) Aplicación de los modelos estocásticos en el dimensionamiento de las presas (en línea). Consultado 10 mar. 2016. Disponible en [http://ateneo.unmsm.edu.pe/ateneo/bitstream/123456789/1820/1/aplicacion\\_modelos\\_estocasticos\\_horque\\_2011.pdf](http://ateneo.unmsm.edu.pe/ateneo/bitstream/123456789/1820/1/aplicacion_modelos_estocasticos_horque_2011.pdf)
- Lee, D; Salas, JD; Boes, DC. (2007) Uncertainty Analysis for Synthetic Streamflow Generation (en línea). Consultado 26 dic. 2016. Disponible en: <http://www.ltrr.arizona.edu/~katie/kt/FLOODS-USGS/NSF-AHIS/World-Env-Water-Res-Congress-Proc-2007/40927-3130.pdf>
- Maidmend, DR. 1993. Handbook of Hydrology. New York, US, McGraw Hill. 1424 p.
- Ministerio de Vivienda, Construcción y Saneamiento. Instituto Nacional de Desarrollo.2002. Plan de Gestión de Oferta de Agua en la Cuenca de Gestión Santa. Lima, PE, S.e. 2 volúmenes.
- Muñoz Carpena, R; Ritter Radriguez, A. 2005. Hidrología Agroforestal. Canarias, ES, Mundi Prensa. 348 p.
- Novalés, A, 1993. Econometría. 2<sup>da</sup> ed. Madrid, ES, MacGraw-Hill/Interamericana de España. 676 p.
- Peña, D. 2010. Análisis de Series Temporales. Madrid; ES, Alianza Editorial. 604 p.
- Pindyck, RS; Rubinfeld, DL. 2001. Econometría modelos pronósticos. 4<sup>ta</sup> ed. México; MX, McMcRaw-Hill/Interamericana Editores. 661 p.
- Sánchez T, J; Sánchez D, M. (2009). Generación de series sintéticas Mensuales del Río Chira Mediante el Uso de Modelos Markovianos (en línea) Anales Científicos UNALAM

vol 70 No.2. 2009 ISSN 0255-0407. Consultado 03. Abr. 2016. Disponible en:  
<https://www.google.com.pe/webhp?sourceid=chrome-instant&ion=1&espv=2&ie=UTF-8#q=modelos+estocasticos+%2Bhidrologia%2Brevista+cient%C3%ADfica&start=20>

Suarez Alayza, W. 2011. Estudio Hídrico de la Cuenca del río Santa. Cambio Climático en la Región Ancash. En Foro Agua Santa 2011, Huaraz, PE. Memoria. Huaraz, Pe. Unión Internacional Para la Conservación de la Naturaleza. S.e.

Sveinsson, O., Salas; J.D., Lane, W. and Frevert, D. 2007. Stochastic Analysis, Modeling, and Simulation (SAMS) Version 2007-User's Manual. Colorado. 118 p.

Vásquez, G; Muñoz G; Tapia J. Series de tiempo.(en línea). Consultado 31 dic. 2011. Disponible en:  
[www.google.com.pe/#hl=es&cp=33&gs\\_id=2u&xhr=t&q=series+de+tiempo+de+gelsi+vasquez&pf=p&client=psy-ab&source=hp&pbx=1&oq=series+de+tiempo+de+gelsi+vasquez&aq=f&aqi=&aql=&gs\\_sm=&gs\\_upl=&bav=on.2,or.r\\_gc.r\\_pw.,cf.osb&fp=fbf77f50f0cb92e4&biw=1600&bih=703](http://www.google.com.pe/#hl=es&cp=33&gs_id=2u&xhr=t&q=series+de+tiempo+de+gelsi+vasquez&pf=p&client=psy-ab&source=hp&pbx=1&oq=series+de+tiempo+de+gelsi+vasquez&aq=f&aqi=&aql=&gs_sm=&gs_upl=&bav=on.2,or.r_gc.r_pw.,cf.osb&fp=fbf77f50f0cb92e4&biw=1600&bih=703).

Ven, TC; Maidmend, DR; Mays, LW. 1994. Hidrología aplicada. Bogotá, CO, McGraw-Hill. 584p.

Villavicencio, J. (2016). Introducción a las series de tiempo (en línea). Consultado 6 abr. 2016. Disponible en:  
[http://www.estadisticas.gobierno.pr/iepr/LinkClick.aspx?fileticket=4\\_BxecUaZmg%3D](http://www.estadisticas.gobierno.pr/iepr/LinkClick.aspx?fileticket=4_BxecUaZmg%3D)

Villón Bejar, M. 2002. Hidrología Estadística. 2ed. Lima, PE, Villón. 380 p.

Wooldrige, JM. 2010. Introducción a la Econometría. Un enfoque moderno. 4ed. México, MX, Cengage learning. 865 p.

## **ANEXOS**

## ANEXO 1

### DATOS DE LOS CAUDALES PROMEDIOS MENSUALES (M<sup>3</sup>/S) DE LOS AFLUENTES DEL RÍO SANTA

CUADRO 1-1

CAUDALES PROMEDIOS MENSUALES DE LA ESTACIÓN QUEROCOCHA

FECHA	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC	MEDIA
1968	1.88	2.34	3.19	1.35	0.69	0.46	0.32	0.41	0.6	1.36	1.56	1.23	1.28
1969	1.72	2.03	2.12	2.43	1.04	0.7	0.38	0.48	0.55	0.95	1.72	3.43	1.46
1970	4.25	3.39	3	2.61	2.31	1.26	0.78	0.62	0.94	1.42	2.15	3.12	2.15
1971	2.69	3.95	4.78	2.46	1.09	0.62	0.48	0.52	0.56	1.15	0.94	1.79	1.75
1972	2.53	2.61	5.72	3.22	1.39	0.74	0.45	0.46	0.49	0.77	0.94	1.6	1.74
1973	2.36	3.53	3.64	3.64	1.24	0.78	0.53	0.54	0.63	1.89	2.64	3.35	2.06
1974	4.32	5.39	4.9	3.43	1.04	0.78	0.44	0.39	0.66	0.67	0.98	1.07	2.01
1975	2.36	2.98	5.11	2.48	2.15	1	0.58	0.61	0.79	1.32	1.4	1.86	1.89
1976	2.93	5.32	3.45	2.17	0.95	0.68	0.43	0.38	0.44	0.71	0.9	1.33	1.64
1977	1.94	2.73	2.89	2.02	1.25	0.68	0.57	0.57	0.73	1.04	2.55	2.29	1.61
1978	1.84	4.12	3.61	1.9	1.38	0.82	0.5	0.45	1.04	1.08	1.46	2.22	1.70
1979	1.95	3.83	5.67	3.83	1.49	0.75	0.62	0.72	0.86	0.97	1.08	1.56	1.94
1980	1.93	2.24	1.94	1.83	1.01	0.66	0.4	0.58	0.79	1.38	1.94	2.78	1.46
1981	2.5	5.65	4.14	2.32	1.13	0.63	0.52	0.49	0.51	1.41	3.52	3.65	2.21
1982	3.51	5.14	3.26	2.59	1.23	0.72	0.44	0.39	0.61	1.85	3.08	4.11	2.24
1983	4.14	2.54	3.96	3.52	2.11	1.17	0.79	0.74	0.94	1.34	1.7	3.35	2.19
1984	2.36	5.11	5.64	3.27	1.96	1.06	0.78	0.52	0.51	1.59	1.36	2.39	2.21
1985	2.36	2.71	3.48	2.92	1.43	0.66	0.37	0.37	0.98	0.94	1.21	2.25	1.64
1986	2.38	2.57	3.32	2.58	1.42	0.56	0.4	0.37	0.58	0.76	1.18	2.42	1.55
1987	3.3	3.08	2.89	1.52	1.06	0.46	0.39	0.36	0.52	1.08	1.25	2.6	1.54
1988	3.9	3.71	2.33	2.21	1.2	0.6	0.39	0.39	0.57	0.83	0.95	1.42	1.54
1989	2.37	3.8	3.95	3.07	1.00	0.5	0.32	0.36	0.4	0.86	1.95	0.78	1.61
1990	1.82	1.41	1.48	1.1	0.66	0.68	0.42	0.32	0.42	1.41	1.83	1.49	1.09
1991	1.81	2.04	3.02	1.84	1.13	0.56	0.38	0.37	0.39	1.16	1.18	1.19	1.26
1992	1.67	1.33	1.34	1.44	1.04	0.7	0.4	0.46	0.43	0.76	0.85	1.52	1.00
1993	2.01	3.92	4.42	3.28	1.4	0.67	0.45	0.4	0.98	1.09	3.14	4.51	2.19
1994	4.93	7.26	4.91	3.9	0.85	0.45	0.22	0.24	0.3	0.68	1.1	1.42	2.19
1995	2.48	1.9	5.34	2.65	1.03	0.47	0.34	0.32	0.65	0.81	1.55	1.54	1.59
1996	3.31	4.74	4.63	3.54	1.53	0.64	0.43	0.38	0.62	1.13	0.86	1.19	1.92
1997	1.87	2.97	1.03	0.75	1.25	0.67	0.46	0.46	0.62	1.11	1.56	2.1	1.24
1998	3.77	10.9	5.02	2.53	1.11	0.65	0.41	0.52	0.64	1.29	1.9	3.21	2.66
1999	3.55	6.11	3.96	2.28	1.41	0.71	0.45	0.34	0.63	0.79	1.22	1.84	1.94
2000	2.23	3.74	5.01	3.52	1.4	0.73	0.46	0.53	0.56	1.19	1.38	1.28	1.84
2001	1.72	5.3	4.72	3.11	2.05	0.85	0.64	0.7	0.85	1.61	1.61	2.56	2.14
2002	2.34	2.53	2.52	1.87	2.01	1.08	0.75	0.63	1.04	1.83	2.5	3.11	1.85
2003	2.89	2.11	3.53	3.38	1.12	0.62	0.45	0.5	0.58	1.38	1.92	2.25	1.73
2004	2.13	3.91	3.47	2.23	1.19	0.57	0.45	0.49	0.64	1.06	1.34	0.88	1.53
2005	1.4	1.75	2.38	0.88	0.73	0.41	0.27	0.25	0.5	0.74	1.17	0.48	0.91
2006	1.69	3.77	3.33	1.1	1.16	0.78	0.59	0.63	0.7	0.76	0.85	0.87	1.35
2007	1.63	2.66	3.46	1.8	0.87	0.49	0.35	0.29	0.3	0.83	1.87	2.3	1.40
2008	3.42	4.09	3.62	2.04	1.31	0.7	0.43	0.36	0.49	1.23	1.25	2.01	1.75

FUENTE: Suarez . 2011. Estudio Hídrico de la Cuenca del río Santa. Cambio Climático en la Región Ancash.

CUADRO 1-2  
CAUDALES PROMEDIOS MENSUALES DE LA ESTACIÓN OLLEROS

FECHA	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC	MEDIA
1968	5.03	5.86	7.41	4.07	2.87	2.45	2.2	2.36	2.7	4.08	4.45	3.85	3.94
1969	4.74	5.3	5.46	6.03	3.5	2.89	2.3	2.49	2.51	3.98	5.27	6.11	4.22
1970	7.12	8.51	12.5	10.04	8.2	4.98	2.76	2.59	3.31	5.98	8.96	11.34	7.19
1971	9.54	7.62	9.67	9.64	3.59	2.12	1.53	1.47	2.15	4.91	4.86	5.28	5.20
1972	4.93	7.05	11.8	11.21	4.93	2.75	1.82	1.63	2.04	2.87	4.07	4.85	5.00
1973	7.14	9.15	12.55	5.92	2.79	1.99	1.52	1.73	2.4	5.19	6.06	6.68	5.26
1974	8.41	13.5	13.26	8.59	3.01	2.22	1.47	1.48	1.69	2.65	3.76	4.82	5.41
1975	8.15	8.29	11.72	7.26	3.68	2.39	1.64	1.83	2.37	3.34	4.29	4.69	4.97
1976	10.64	12.79	9.59	6.32	3.64	2.69	1.57	1.52	2.21	3.76	3.64	4.89	5.27
1977	5.86	6.57	8.63	5.82	4.49	2.36	2.07	2.45	2.2	2.58	7	5.49	4.63
1978	5.36	10.83	6.87	3.47	2.7	2.61	1.45	1.36	2.77	2.94	4.14	5.38	4.16
1979	5.77	12.26	13.51	8.37	4.02	2.22	1.78	2.3	2.52	4.06	4.57	6.32	5.64
1980	7.58	7.42	7.39	3.68	2.14	1.77	1.56	2.31	3.92	5.33	6.69	8.14	4.83
1981	7.93	4.85	6.22	3.53	1.52	2.01	1.87	1.82	2.5	4.05	7.74	6.14	4.18
1982	7.05	10.72	3.71	3.28	1.86	1.88	2.08	2.32	3.36	7.72	10.92	11.17	5.51
1983	13.49	9.38	12.04	8.4	3.54	2.45	1.81	1.94	2.66	3.72	4.92	6.74	5.92
1984	5.14	14.28	15.79	8.07	4.02	2.34	1.85	1.6	1.85	5.21	3.83	7.31	5.94
1985	4.8	4.97	7.45	7.26	3.72	1.93	1.35	1.44	3.67	3.75	4.64	8.96	4.50
1986	5.97	5.71	3.91	3.49	2.4	1.69	1.56	2.05	3.44	4.57	5.18	4.17	3.68
1987	5.18	4.52	4.81	3.39	2.29	1.72	1.65	1.65	2.87	4.09	5.83	4.52	3.54
1988	8.79	7.79	5.34	5.89	3.12	1.74	1.53	1.71	2.47	3.92	3.88	4.33	4.21
1989	6.28	10.98	9.95	9.31	4.4	3.16	2.57	2.78	1.62	3.39	3.7	5.01	5.26
1990	5.17	4.52	4.48	3.12	1.81	1.52	0.69	0.79	0.81	3.01	4.56	5.01	2.96
1991	4.22	3.71	8.24	3.7	3.08	1.53	1.32	1.8	2.47	3.24	3.28	5.23	3.49
1992	5.36	5.14	6.49	5.69	4.16	2.5	1.51	2.08	3.17	4.07	3.92	4.42	4.04
1993	9.26	9.84	9.64	8.11	5.86	3.54	2.99	3.16	2.45	3.83	6.51	6.11	5.94
1994	10.04	10.3	7.23	5.95	2.89	1.86	1.36	1.38	1.63	2.47	3.96	4.92	4.50
1995	5.6	6.04	8.65	9.77	3.05	2.42	1.87	2.31	2.46	2.82	5	5.85	4.65
1996	7.24	7.29	10.34	6.56	2.64	1.88	1.48	1.35	2.73	3.88	5.2	5.47	4.67
1997	6.44	8.27	7.08	3.76	2.91	2.25	1.95	2.1	2.5	3.96	6.21	7.96	4.62
1998	7.94	14.55	10.66	8.18	3.87	2.04	1.35	1.62	2.63	4.37	5.75	7.94	5.91
1999	8.37	11.87	9.62	5.87	3.92	2.52	1.89	1.65	2.77	3.15	4.15	5.27	5.09
2000	5.85	8.58	11.61	9.13	4.49	2.86	2.07	2.41	2.3	3.91	4.4	4.09	5.14
2001	4.83	11.57	11.59	8.31	6.07	3.17	2.81	3.19	3.1	5.31	5.43	6.97	6.03
2002	5.77	6.25	5.85	4.44	5.18	3.5	2.88	2.77	3.77	6.21	7.77	8.2	5.22
2003	6.95	5.24	7.73	8.47	3.58	2.48	2.11	2.35	2.44	4.52	5.78	6.02	4.81
2004	5.26	8.71	8.31	5.61	3.28	2.06	2.04	2.28	2.6	3.72	4.42	3.38	4.31
2005	4.3	5.66	5.74	1.78	1.34	1.26	1.04	1.04	2.33	2.83	3.83	2.45	2.80
2006	5.28	9.23	8.28	2.65	2.65	2.48	2.32	2.67	2.58	2.77	3.06	3.22	3.93
2007	4.83	7.15	8.26	4.4	2.2	1.72	1.53	1.41	1.69	2.81	5.11	5.66	3.90
2008	8.4	8.61	8.45	4.97	3.45	2.4	1.69	1.61	2.2	4.04	4.2	5.59	4.63

FUENTE: Suarez . 2011. Estudio Hídrico de la Cuenca del río Santa. Cambio Climático en la Región Ancash.

CUADRO 1-3  
CAUDALES PROMEDIOS MENSUALES DE LA ESTACIÓN DE QUILLCAY

FECHA	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC	MEDIA
1968	9.88	8.12	9.56	5.55	3.67	3	2.71	2.54	3.5	5.14	5.78	7.75	5.60
1969	8.58	8.04	10.63	14.01	8.6	6.27	4.68	5.72	5.76	8.24	10.88	11.43	8.57
1970	16.04	12.69	11.82	8.51	6.57	4.89	3.69	3.29	3.55	5.53	7.92	8.47	7.75
1971	16.38	17.45	20.75	12.4	5.37	4.49	2.78	2.49	3.2	5	5.58	10.13	8.84
1972	11.35	15.65	13.73	7.75	5.44	4.36	3.7	3.72	3.77	4.29	6.36	6.17	7.19
1973	10.96	11.08	10.47	11.48	5.94	3.98	2.96	2.9	3.01	6.84	10.86	10.66	7.60
1974	13.77	15.44	14.58	9.38	4.82	3.24	2.91	2.72	2.64	4.32	7.14	6.72	7.31
1975	11.01	10.43	15.56	10.1	7.09	3.69	3.15	3.11	3.35	4.24	6.9	6.44	7.09
1976	9.52	10.3	11.32	9.34	5.99	4.04	3.35	3.05	3.58	6.85	7.56	8.87	6.98
1977	11.43	9.82	10.87	8.65	5.11	2.96	3.24	4.1	3.95	6.03	8.08	8.73	6.91
1978	8.08	9.4	8.82	7.74	5.67	4.16	3.76	3.19	4.75	5.73	6.97	9.68	6.50
1979	10.46	12.27	16.85	8.37	5.55	4	3.21	3.78	4.22	5.34	6.51	8.72	7.44
1980	8.62	8.98	7.83	7.06	4.95	4.39	3.08	3.92	5.92	6.31	10.85	11.87	6.98
1981	9.15	16.88	13.18	6.68	4.71	3.84	4.04	3.47	3.7	5.9	10.63	11.51	7.81
1982	12.32	13.61	7.72	7.15	6.07	5.07	2.79	2.87	3.86	5.68	12.1	12.98	7.69
1983	14.96	12.76	11.88	9.62	5.67	3.91	4.07	3.38	4.44	7.15	9.48	9.04	8.03
1984	7.37	15.08	13.98	8.57	5.81	3.74	2.67	2.97	3.33	5.73	5.61	8.12	6.92
1985	7.34	6.18	6.96	7.06	4.49	2.67	1.72	2.11	5.27	5.38	7.33	6.83	5.28
1986	8.98	8.87	8.42	6.71	4.62	2.61	2.43	3.38	3	4.42	5.48	9.45	5.70
1987	16.21	13.33	11.06	9.03	7.82	3.56	2.76	3.7	4.12	7.26	9.23	13.29	8.45
1988	10.75	12.22	9.07	9.87	5.18	3.44	2.62	3.66	3.34	5.74	7.1	6.93	6.66
1989	9.47	12.66	15.04	13.85	7.07	2.98	1.8	3.19	3.98	6.18	8	12.96	8.10
1990	10.83	9.62	7.88	7.23	4.73	3.19	2.37	4.28	3.63	5.12	8.28	9.08	6.35
1991	9.22	9.52	12.68	8.02	6.42	4.59	3.48	4.33	4.36	4.91	6.04	9.25	6.90
1992	10.04	9.73	9.88	8.86	6.54	5.6	4.34	4.98	6.9	7.6	9.61	11.73	7.98
1993	11.44	14.19	13.68	13.8	5.35	2.18	1.44	1.39	2.1	3.82	9.22	14.85	7.79
1994	11.37	14.89	12.03	9.78	4.59	2.91	1.82	2.35	3.43	4.51	7.01	7.3	6.83
1995	7.79	8.99	18.15	14.37	5.86	3.74	2.22	3.52	3.93	4.54	6.07	16.71	7.99
1996	8.58	11.62	11.49	10.39	4.32	2.53	2.35	3.17	3.64	4.69	5.14	3.75	5.97
1997	5.09	7.24	7.04	5.08	4.17	3.26	3.76	4.1	4.4	4.57	5.81	5.32	4.99
1998	13.21	15.71	8.73	3.93	3.11	3.82	3.14	3.44	3.8	5.88	8.43	12.63	7.15
1999	12.64	16.1	13.51	8.68	6.04	3.83	2.93	2.35	3.63	4.45	6.38	8.43	7.41
2000	9.09	12.32	15.95	13.45	6.52	4.29	3.2	4.12	3.65	5.6	7.09	6.52	7.65
2001	7.65	15.54	15.79	12.06	8.52	4.48	4.27	5.27	5.26	7.5	8.78	11.68	8.90
2002	8.93	9.73	9.04	7.43	7.92	5.83	4.99	4.58	6.1	8.44	11.53	12.8	8.11
2003	10.23	8.52	11.29	13.44	5.65	3.86	3.38	4.03	3.86	6.23	8.68	9.35	7.38
2004	7.92	12.26	11.83	8.57	5.32	3.06	3.13	3.79	3.98	5.42	7.12	5.25	6.47
2005	6.86	8.99	8.87	3.12	3.21	2.05	1.58	1.65	2.82	3.9	5.76	3.25	4.34
2006	8.33	13.03	12	3.79	4.65	4.28	4.04	4.87	4.47	4.91	6.07	6.09	6.38
2007	8.21	10.96	12.05	6.76	4.05	2.67	2.37	2.1	1.89	3.71	7.07	8.28	5.84
2008	12.73	12.53	12.22	7.61	5.58	3.8	2.71	2.5	2.86	5.2	6.22	8.78	6.90

FUENTE: Suarez . 2011. Estudio Hídrico de la Cuenca del río Santa. Cambio Climático en la Región Ancash.



CUADRO 1-4  
CAUDALES PROMEDIOS MENSUALES DE LA ESTACIÓN DE CHANCOS

FECHA	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC	MEDIA
1968	9.96	8.39	9.68	6.1	4.42	3.82	3.56	3.41	4.27	5.73	6.3	8.06	6.14
1969	8.8	8.3	10.63	13.65	8.82	6.74	5.32	6.25	6.29	8.5	10.86	11.35	8.79
1970	11.12	10.39	10.98	12.2	8.29	6.08	5.88	5.66	4.4	6.24	8.4	9.07	8.23
1971	9.72	13.58	20.83	10.76	5.41	4.09	3.73	3.4	4.14	5.69	5.9	7.6	7.90
1972	8.16	10.85	21.44	6.87	5.03	3.72	3.66	3.76	3.76	4.96	6.94	7.62	7.23
1973	9.67	10.03	11.36	13.47	7.6	4.52	3.58	3.82	4.4	5.96	8.13	8.01	7.55
1974	11.01	11.61	13.24	10.99	4.87	4.3	3.51	3.37	3.5	4.72	6.47	8.41	7.17
1975	11.72	11.45	16.77	9.33	6.56	3.77	3.59	4.14	3.78	5.19	5.24	4.94	7.21
1976	8.56	12.63	12.67	6.69	6.62	4.62	4.22	4.32	6.33	8.86	8.93	9.03	7.79
1977	13.86	14.3	14.61	13.8	8.85	5.75	5.23	5.29	4.83	12.51	16.79	17.4	11.10
1978	19.06	22.98	20.47	16.02	13.96	6.76	5.49	5.43	6.42	6.68	8.93	11.87	12.01
1979	11.6	14.8	20.11	11.57	7.39	6.38	5.13	5.72	6.82	8.62	9.8	11.25	9.93
1980	12.31	14.56	11.23	10.31	6.13	5.98	4.81	5.02	8.3	11.74	4.85	11.78	8.92
1981	10.51	18.4	17.24	12.33	7.16	5.25	5.24	4.58	5.13	10.67	13.52	9.4	9.95
1982	10.94	17.62	14.44	12.55	7.94	6.24	4.2	4.68	5.67	10.38	12.66	14.87	10.18
1983	20.35	17.58	19.73	17.05	12.87	7.19	7.05	6.27	7.16	12.23	10.36	9.49	12.28
1984	9.72	15.8	20.61	14.1	6.88	4.25	4.27	4.65	4.99	7.08	6.31	11.31	9.16
1985	11.46	11.5	11.54	13.05	3.92	3.22	3.19	3.64	5.51	5.34	6.16	8.5	7.25
1986	12.69	10.64	10.77	13.03	7	5.19	4.37	4.5	4.76	7.28	8.33	10.51	8.26
1987	14.39	15.4	15.3	12.87	7.82	4.3	3.97	3.98	5.25	8.42	12.26	14.19	9.85
1988	16.3	17.58	13.41	11.21	5.98	3.93	3.32	3.79	5.03	6.9	8.96	6.43	8.57
1989	9.88	13.8	14.74	15.01	5.41	3.03	2.38	2.68	3.39	6.27	7.48	9.18	7.77
1990	10.67	12.51	9.9	7.56	3.08	2.92	2.52	2.65	4.43	7.72	10.76	10.43	7.10
1991	10.89	12.64	17.51	9.37	5.97	4.4	3.59	3.95	4.53	4.71	5.65	8.6	7.65
1992	8.86	10.49	6.22	4.12	2.52	1.12	2.06	2.41	2.51	2.85	3.39	4.16	4.23
1993	8.37	15.04	13.32	13.66	7.33	3.73	3.3	3.37	3.97	5.81	8.47	18.84	8.77
1994	14.64	14.46	12.21	12.33	9.37	4.41	3.48	4.06	5.16	6.02	9.45	16.38	9.33
1995	12.36	11.99	10.36	7.92	5.2	4.62	5.14	5.21	5.34	7.5	8.93	7.87	7.70
1996	11.14	16.66	7.2	14.91	7.67	5.92	5.47	4.79	4.79	8.01	9.76	10.91	8.94
1997	10.76	9.01	12.22	6.16	6	8.29	4.24	4.39	3.51	4.59	5.55	9.82	7.05
1998	11.11	11.45	7.11	5.77	2.27	2.27	2.38	2.77	4.1	8.43	10.83	10.9	6.62
1999	10.08	12.59	13.8	10.82	6.33	6.17	4.63	4.7	5.4	8.92	8.98	12.02	8.70
2000	14.17	10.57	12.69	8.72	8.29	5.2	5.22	5.44	4.77	8.35	9.85	11.97	8.77
2001	12.8	12.73	16.88	10.5	6.48	4.46	4.54	5.07	5.4	8.1	10.7	9.58	8.94
2002	9.42	15.97	16.14	8.55	5.73	4.59	3.67	3.9	4.86	7.66	4.39	4.09	7.41
2003	6.47	9.47	9.29	9.54	5.99	4.42	4.94	4.76	4.9	4.89	5.1	8.63	6.53
2004	8.15	13.45	16.57	7.81	5.57	3.13	4.02	4.4	3.9	3.22	5.33	8.98	7.04
2005	10.74	9.71	10.92	10.31	5.3	4.89	3.81	4.16	6.5	9.68	11.77	13.85	8.47
2006	18.65	16.27	21.09	4.63	6.07	0.78	1.9	2.35	5.03	6.07	6.9	7.99	8.14
2007	6.34	8.14	13.87	8.09	6.84	5.47	4.16	4.48	4.54	8.1	10.85	13.34	7.85
2008	13.99	14.21	11.87	5.38	4.27	1.98	2.27	3.06	5.79	9.1	8.34	7.32	7.30

FUENTE: Suarez . 2011. Estudio Hídrico de la Cuenca del río Santa. Cambio Climático en la Región Ancash.

CUADRO 1-5  
CAUDALES PROMEDIOS MENSUALES DE LA ESTACIÓN DE LLANGANUCO

FECHA	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC	MEDIA
1968	3.33	3.38	2.73	2.42	2.06	1.87	1.70	1.57	1.84	2.02	2.62	3.39	2.41
1969	3.83	3.57	4.10	3.87	3.11	2.48	2.15	2.09	2.15	2.78	3.42	3.85	3.12
1970	4.32	3.93	3.89	3.92	2.97	1.33	3.70	3.02	2.24	2.36	2.66	3.07	3.12
1971	3.54	3.51	5.22	3.80	2.46	2.19	1.81	1.43	1.58	2.13	2.48	3.15	2.78
1972	3.00	3.88	4.96	4.58	2.87	2.19	2.11	2.09	1.84	2.09	2.96	3.78	3.03
1973	4.95	5.20	5.51	4.70	2.94	2.35	2.06	2.10	1.85	2.33	3.21	3.07	3.36
1974	3.79	3.71	4.18	3.67	2.54	1.77	1.34	1.43	1.21	1.71	3.01	2.90	2.61
1975	3.20	3.60	5.23	3.63	2.31	1.56	1.70	1.66	1.12	1.49	2.77	2.29	2.55
1976	3.14	3.78	4.04	3.32	2.27	1.87	1.98	1.80	1.91	2.92	3.32	3.73	2.84
1977	4.55	4.47	4.88	4.04	2.52	2.12	2.08	2.22	1.97	2.57	3.03	3.49	3.16
1978	4.33	5.14	4.25	3.40	3.20	2.27	1.94	1.93	1.85	2.21	2.73	3.89	3.10
1979	4.76	4.31	5.22	3.94	3.01	2.60	2.14	2.07	2.39	2.73	3.52	4.61	3.44
1980	3.86	4.60	4.04	4.08	3.14	3.25	2.33	2.46	3.57	3.11	3.25	4.15	3.49
1981	4.17	5.08	4.69	3.50	2.89	2.95	2.35	2.10	2.03	2.82	3.46	3.72	3.31
1982	4.17	4.61	4.36	3.82	2.85	2.53	2.03	2.00	1.96	2.32	3.21	4.11	3.16
1983	5.98	5.81	6.22	4.69	3.87	3.02	3.04	3.25	3.30	3.70	5.00	3.89	4.31
1984	2.85	5.89	5.75	4.22	2.74	2.00	1.85	2.16	2.07	2.72	3.04	3.49	3.23
1985	3.68	3.11	3.37	3.44	2.36	1.71	1.34	1.34	1.80	2.16	3.18	3.13	2.55
1986	3.86	3.38	3.69	5.80	3.14	2.59	2.14	1.81	1.57	2.48	3.23	4.08	3.15
1987	4.99	5.45	4.70	4.27	3.61	2.95	2.50	2.25	2.22	2.61	3.17	4.53	3.60
1988	5.75	6.04	4.65	4.21	3.21	2.56	2.03	1.96	2.27	2.55	2.99	2.97	3.43
1989	3.08	4.00	4.49	3.55	2.22	1.81	1.49	1.63	1.55	2.18	2.88	3.52	2.70
1990	4.02	4.60	3.70	3.13	2.48	2.15	2.00	2.03	1.94	2.11	2.78	3.34	2.86
1991	3.97	4.20	6.72	3.77	2.72	2.37	1.70	1.75	1.65	1.63	2.27	3.51	3.02
1992	3.73	4.03	4.20	3.60	2.60	2.20	2.00	1.86	1.90	1.94	2.80	3.84	2.89
1993	3.42	4.86	4.55	3.94	2.80	2.14	1.79	1.67	1.80	1.96	3.08	4.00	3.00
1994	3.80	4.87	5.06	4.12	2.70	1.91	1.60	1.61	1.74	1.84	2.50	3.32	2.92
1995	4.44	3.92	4.11	4.71	2.76	2.47	2.00	2.19	2.08	2.48	3.06	3.84	3.17
1996	4.09	4.97	4.53	3.76	2.40	1.93	2.13	2.50	2.24	2.58	2.27	2.84	3.02
1997	3.25	3.12	3.57	2.61	2.07	2.15	2.03	2.02	1.95	2.39	3.12	4.33	2.72
1998	4.77	5.46	4.74	3.45	2.77	2.18	1.86	1.53	1.79	1.75	2.43	3.22	3.00
1999	3.42	4.31	5.37	4.57	3.05	2.47	1.95	2.14	1.85	2.25	2.75	2.85	3.08
2000	2.95	5.08	5.23	4.20	3.63	2.48	2.63	2.81	2.70	3.16	3.47	4.28	3.55
2001	3.97	3.94	3.75	3.30	3.40	3.06	2.73	2.46	2.90	3.41	4.11	4.46	3.46
2002	4.31	3.63	4.36	4.74	2.84	2.35	2.24	2.31	2.09	2.62	3.29	3.61	3.20
2003	3.39	4.43	4.35	3.48	2.56	1.86	2.26	2.30	2.19	2.34	2.88	2.64	2.89
2004	2.72	3.42	3.56	2.20	1.74	1.33	1.40	1.28	1.46	1.54	2.24	1.95	2.07
2005	2.67	4.23	4.19	2.23	2.16	2.28	2.47	2.61	2.35	2.10	2.55	2.81	2.72
2006	3.10	3.93	4.35	3.01	2.09	1.66	1.80	1.55	1.23	1.57	2.64	3.19	2.51
2007	4.25	4.30	4.35	3.20	2.59	2.15	1.69	1.51	1.45	2.03	2.44	3.35	2.78
2008	4.47	4.63	3.78	4.36	2.51	1.77	1.31	1.99	1.58	2.26	2.76	4.20	2.97

FUENTE: Suarez . 2011. Estudio Hídrico de la Cuenca del río Santa. Cambio Climático en la Región Ancash.

CUADRO 1-6  
CAUDALES PROMEDIOS MENSUALES DE LA ESTACIÓN DE PARON

FECHA	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC	MEDIA
1968	1.83	1.82	1.63	1.48	1.33	1.11	0.94	0.86	1.00	1.09	1.29	1.72	1.34
1969	2.24	2.41	2.46	2.43	2.19	1.67	1.36	1.11	1.15	1.33	1.35	1.68	1.78
1970	2.05	1.94	2.29	2.16	1.85	1.40	1.15	0.91	1.09	1.14	1.37	1.75	1.59
1971	2.13	2.39	2.75	2.56	1.75	1.38	1.04	0.82	0.84	1.02	1.38	1.64	1.64
1972	1.51	1.81	2.11	2.38	2.51	1.47	1.30	1.15	1.13	1.15	1.39	1.78	1.64
1973	2.59	2.95	2.95	2.38	2.14	1.65	1.39	1.30	1.12	1.24	1.53	1.78	1.92
1974	1.92	2.05	2.28	1.98	1.61	1.40	1.05	0.92	0.83	0.93	1.28	1.62	1.49
1975	1.68	1.76	2.08	2.10	1.84	1.39	1.10	0.76	1.04	0.97	1.29	1.47	1.46
1976	1.60	1.77	1.99	2.16	1.80	1.49	1.10	0.88	0.82	1.29	1.84	2.10	1.57
1977	2.48	2.53	2.38	2.33	2.06	1.63	1.45	1.43	1.39	1.53	1.71	1.96	1.91
1978	2.15	2.63	2.43	2.23	2.00	1.64	1.51	1.38	1.40	1.38	1.76	1.98	1.87
1979	3.54	3.74	3.20	2.53	2.11	1.85	1.38	1.46	1.38	1.65	1.88	2.54	2.27
1980	3.05	2.87	3.03	2.78	2.31	2.15	1.88	1.70	1.99	2.08	2.14	2.34	2.36
1981	2.93	3.41	3.51	2.59	2.38	2.17	1.74	1.60	1.58	1.72	1.94	2.08	2.30
1982	2.35	2.61	2.73	2.64	2.35	1.91	1.53	1.31	1.23	1.34	1.59	1.77	1.95
1983	3.19	4.23	3.54	3.23	2.41	1.93	1.72	1.92	2.03	1.95	2.17	2.39	2.56
1984	2.16	3.16	3.52	4.46	2.94	0.58	0.54	0.64	0.71	0.75	0.83	1.23	1.79
1985	1.75	5.04	4.38	3.92	3.72	3.61	3.57	3.58	2.85	2.56	2.37	2.39	3.31
1986	2.62	2.53	2.41	2.39	2.26	2.06	1.99	1.87	1.92	1.76	1.94	2.11	2.16
1987	2.75	2.95	3.12	3.04	2.94	2.96	2.35	1.93	1.98	1.88	2.02	2.27	2.52
1988	2.70	2.82	2.85	2.81	2.42	2.43	2.42	2.37	2.46	2.21	1.97	1.70	2.43
1989	2.08	2.35	2.66	2.66	2.43	2.02	1.91	1.69	1.30	1.26	1.49	1.77	1.97
1990	3.50	5.61	3.17	2.31	1.69	1.75	1.09	0.98	1.03	1.12	1.85	1.91	2.17
1991	1.83	3.89	6.57	2.90	2.26	2.21	2.06	1.93	1.88	1.48	1.58	4.61	2.77
1992	4.32	7.72	0.53	0.44	0.42	1.32	1.21	5.68	4.68	2.14	3.84	1.84	2.85
1993	1.53	0.59	0.58	0.60	0.51	1.20	5.53	7.55	3.14	1.13	0.87	0.93	2.01
1994	0.31	0.31	0.32	0.17	1.93	1.59	4.27	4.25	1.25	1.39	1.72	2.61	1.68
1995	3.10	4.68	2.75	2.11	2.00	1.52	1.12	3.28	0.86	0.76	1.01	1.73	2.08
1996	1.93	2.57	3.63	3.37	2.59	2.00	1.43	2.32	1.40	1.40	1.51	1.35	2.13
1997	1.46	3.12	3.14	2.81	2.98	1.71	2.62	4.20	2.69	2.19	2.18	2.51	2.63
1998	2.42	2.45	1.78	1.71	2.46	2.32	2.75	2.66	2.64	2.26	2.62	2.39	2.37
1999	2.45	1.94	2.60	3.21	2.21	1.80	2.01	2.71	1.72	1.70	2.00	1.90	2.19
2000	1.82	2.58	2.28	1.97	1.70	1.12	1.96	2.58	1.81	1.43	1.58	1.07	1.83
2001	1.15	0.90	1.40	0.63	0.59	0.52	0.17	3.11	0.38	0.59	0.83	0.55	0.90
2002	1.06	1.77	1.95	0.78	1.10	1.64	2.43	3.65	2.18	1.27	1.33	1.38	1.71
2003	1.62	1.90	2.39	1.65	1.22	1.01	1.11	0.08	0.17	0.68	1.26	1.66	1.23
2004	2.54	2.88	2.44	1.83	1.77	1.49	0.79	1.02	0.43	1.06	1.08	1.87	1.60
2005	2.81	3.50	1.70	2.54	1.62	1.00	1.49	1.97	1.04	1.44	1.55	2.68	1.95
2006	3.45	4.90	2.02	1.79	1.90	1.97	2.19	2.82	2.41	1.54	1.33	1.83	2.35
2007	2.84	2.84	1.60	0.69	1.33	1.34	1.01	2.53	1.84	1.34	1.20	1.98	1.71
2008	3.15	4.66	4.90	4.36	3.52	2.27	2.27	2.14	1.19	0.99	1.41	2.56	2.79

FUENTE: Suarez . 2011. Estudio Hídrico de la Cuenca del río Santa. Cambio Climático en la Región Ancash.

CUADRO 1-7  
CAUDALES PROMEDIOS MENSUALES DE LA ESTACIÓN DE COLCAS

FECHA	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC	MEDIA
1968	7.59	6.54	6.85	4.78	3.43	2.68	2.31	2.04	2.34	3.39	4.46	5.56	4.33
1969	7.11	8.03	10.21	7.78	4.30	3.05	2.75	2.87	2.94	4.39	5.47	8.33	5.60
1970	9.91	6.69	7.75	6.36	5.27	3.78	3.67	3.39	2.94	4.35	6.10	7.78	5.67
1971	6.82	11.23	16.75	7.07	3.52	2.97	3.31	3.34	3.35	3.46	4.78	7.37	6.16
1972	7.62	8.39	13.66	7.67	5.43	4.50	4.30	6.93	4.97	5.18	5.42	6.65	6.73
1973	10.23	11.40	11.97	10.22	6.10	3.81	3.08	3.01	2.86	4.96	6.28	7.08	6.75
1974	11.22	16.42	10.86	6.98	4.76	4.39	3.44	3.36	2.46	2.89	2.97	5.41	6.26
1975	6.46	9.33	14.96	11.44	5.68	2.78	2.61	2.59	2.26	2.62	2.79	3.69	5.60
1976	9.05	7.27	9.01	6.05	4.38	3.39	2.78	2.96	3.03	4.88	6.39	6.32	5.46
1977	8.92	11.14	14.90	5.37	5.53	3.52	6.63	4.02	3.66	4.56	6.98	6.16	6.78
1978	6.89	7.44	8.25	11.15	6.55	3.01	2.40	2.40	4.20	4.35	5.75	9.61	6.00
1979	12.72	10.06	9.19	9.14	5.99	5.17	4.51	4.12	3.79	5.18	6.93	7.32	7.01
1980	7.25	7.80	7.22	7.69	5.84	8.58	6.81	6.88	8.89	10.42	9.74	8.68	7.98
1981	7.76	12.12	11.33	5.41	5.60	6.34	4.14	3.16	3.72	5.39	8.21	9.00	6.85
1982	8.93	13.38	12.09	6.42	3.71	3.17	2.64	2.52	2.63	3.66	6.22	8.55	6.16
1983	11.70	10.49	10.62	9.18	7.62	7.21	6.27	4.81	4.96	4.89	6.65	7.49	7.66
1984	5.23	13.38	9.31	6.36	5.03	3.17	2.46	2.55	2.44	3.87	3.99	5.59	5.28
1985	5.30	4.75	4.77	4.73	3.06	2.08	2.02	2.09	2.44	3.00	4.74	5.88	3.74
1986	9.10	7.04	7.15	7.15	5.33	4.00	3.50	3.48	6.80	8.02	5.36	9.29	6.35
1987	17.36	12.50	5.36	5.79	4.42	3.82	3.17	2.81	2.87	3.47	4.07	4.08	5.81
1988	8.85	11.44	6.09	7.11	4.96	3.01	3.77	3.62	2.24	2.47	2.62	4.32	5.04
1989	4.15	5.10	3.81	3.22	2.17	3.25	3.13	2.50	2.89	5.03	6.51	5.88	3.97
1990	9.19	9.82	5.08	4.03	3.40	2.97	2.54	2.45	1.97	3.85	5.32	6.33	4.75
1991	6.73	8.23	12.92	7.08	4.62	3.63	0.50	3.15	1.58	2.08	2.79	6.58	4.99
1992	8.06	9.40	9.74	7.21	4.68	3.72	0.65	3.18	3.28	3.18	3.61	4.34	5.09
1993	5.35	8.47	15.35	11.05	7.97	5.84	4.05	4.28	4.40	3.80	7.16	3.84	6.80
1994	6.75	10.13	10.20	7.94	3.16	4.12	2.35	2.07	1.94	2.98	4.20	5.45	5.11
1995	6.92	7.31	7.48	6.17	3.69	3.57	3.45	3.33	3.25	2.40	3.30	4.78	4.64
1996	2.72	3.57	5.01	7.29	4.68	3.74	3.14	1.03	1.30	2.38	2.15	2.92	3.33
1997	4.22	9.01	6.56	3.56	2.78	2.64	2.19	2.33	2.82	4.08	5.58	8.42	4.52
1998	10.24	12.67	10.14	6.09	4.66	3.45	2.67	1.76	2.26	2.39	3.79	5.73	5.49
1999	6.47	9.39	13.37	9.56	5.80	4.38	3.23	3.85	3.44	4.55	5.15	5.14	6.19
2000	5.48	12.10	12.59	8.40	6.99	3.81	3.99	4.72	5.17	6.80	6.70	8.43	7.10
2001	7.84	7.99	6.92	5.94	6.21	5.62	4.91	3.92	5.55	7.41	8.59	8.95	6.65
2002	8.92	6.98	9.53	10.23	5.47	4.29	3.77	3.96	3.81	5.32	6.53	6.96	6.31
2003	6.47	9.81	9.25	6.39	4.28	2.74	3.14	3.49	3.57	4.29	5.11	4.34	5.24
2004	4.55	6.77	6.60	2.75	1.97	1.63	1.34	1.28	1.43	1.65	3.16	2.50	2.97
2005	4.54	9.42	8.79	2.69	2.90	4.07	4.07	4.51	4.46	4.36	4.80	5.19	4.98
2006	6.07	8.48	9.62	5.07	3.04	2.46	2.33	1.75	0.75	1.46	4.25	5.60	4.24
2007	9.05	9.26	9.24	5.54	4.25	3.51	2.46	1.99	1.68	3.01	3.49	5.82	4.94
2008	9.53	10.20	6.74	9.06	4.52	2.73	1.57	3.97	3.22	4.81	5.39	8.66	5.87

FUENTE: Suarez . 2011. Estudio Hídrico de la Cuenca del río Santa. Cambio Climático en la Región Ancash.

CUADRO 1-8  
CAUDALES PROMEDIOS MENSUALES DE LA ESTACIÓN DE LOS CEDROS

FECHA	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC	MEDIA
1968	3.80	3.48	4.19	2.90	2.19	2.02	2.00	1.97	2.21	2.92	2.91	3.51	2.84
1969	3.71	4.76	6.11	5.50	3.08	2.68	2.25	2.59	2.76	3.39	3.65	4.55	3.75
1970	6.09	3.99	4.79	4.98	3.86	3.00	2.97	2.93	2.67	4.48	3.02	3.32	3.84
1971	2.85	2.52	5.98	5.97	3.77	3.03	2.86	2.85	2.88	3.00	3.23	4.94	3.66
1972	3.91	3.99	6.55	7.65	4.31	3.05	2.85	2.92	2.33	2.82	3.46	4.80	4.05
1973	5.46	5.89	7.02	5.54	3.67	3.33	2.65	2.21	2.18	3.40	3.96	4.08	4.12
1974	5.11	5.04	5.74	4.99	3.84	2.43	2.28	2.25	2.35	2.64	3.05	3.30	3.59
1975	3.28	5.41	7.37	5.31	3.29	2.33	1.86	2.02	2.10	2.44	2.57	2.28	3.36
1976	3.14	2.96	3.96	3.74	2.81	2.34	2.16	1.92	1.79	2.45	2.47	3.03	2.73
1977	5.57	6.08	3.28	3.14	2.58	2.27	2.63	2.86	2.62	3.23	4.35	4.11	3.56
1978	3.60	5.00	3.66	3.99	3.92	2.71	2.13	2.45	2.77	2.67	3.33	3.97	3.35
1979	4.42	4.44	5.27	3.63	3.15	2.77	2.47	2.48	2.66	3.30	3.85	4.07	3.54
1980	3.68	3.95	3.57	3.55	2.89	3.20	2.51	2.56	3.43	3.38	3.47	4.65	3.40
1981	4.13	5.42	5.34	3.83	2.82	2.31	2.15	2.00	1.96	2.96	4.07	4.68	3.47
1982	4.30	5.07	4.34	4.26	2.89	2.36	1.94	2.12	2.27	2.87	3.59	4.33	3.36
1983	6.45	6.23	6.17	2.65	1.94	1.40	1.31	1.49	1.47	1.64	1.76	2.95	2.96
1984	5.74	8.55	5.03	4.48	3.58	2.51	1.88	1.85	2.00	2.78	2.49	3.12	3.67
1985	3.07	3.04	3.65	3.42	2.45	1.64	1.45	1.59	2.25	2.47	2.96	2.90	2.57
1986	3.93	3.45	3.39	5.00	2.86	2.45	1.79	1.68	2.11	2.71	3.13	4.23	3.06
1987	4.98	5.91	4.50	3.65	2.72	2.20	1.96	1.85	2.14	2.42	2.92	3.43	3.22
1988	4.88	6.34	5.57	5.61	3.50	2.72	2.48	2.39	2.52	3.18	3.69	3.16	3.84
1989	4.96	6.72	6.63	6.40	3.16	2.53	1.73	1.93	1.77	2.57	2.61	2.99	3.67
1990	3.51	4.07	3.82	2.80	2.54	1.99	1.88	2.18	1.87	2.97	3.88	3.36	2.91
1991	3.50	4.10	8.92	5.24	3.27	3.32	1.95	2.10	2.08	2.12	2.28	3.73	3.55
1992	3.11	3.17	4.08	3.60	2.77	2.24	2.16	2.72	1.64	1.91	1.70	2.57	2.64
1993	2.45	4.42	8.30	7.60	3.66	2.35	2.37	4.57	3.19	3.43	4.33	7.13	4.48
1994	5.53	6.73	6.20	5.25	3.44	1.86	3.40	2.47	2.05	1.94	2.44	3.28	3.72
1995	3.54	3.23	4.14	5.26	3.49	2.86	2.86	2.78	2.76	2.57	3.13	4.02	3.39
1996	3.84	5.30	6.73	6.14	3.45	2.54	2.47	3.58	3.92	2.91	2.83	2.28	3.83
1997	2.61	3.68	3.12	2.34	1.93	1.90	1.84	2.59	2.69	2.37	3.16	4.07	2.69
1998	4.23	4.89	4.30	3.29	2.00	1.44	1.83	1.47	1.16	3.46	4.49	1.60	2.85
1999	3.85	6.80	5.64	4.29	3.09	2.16	2.01	3.73	2.91	2.37	2.15	3.99	3.58
2000	2.06	3.59	4.27	3.31	2.88	2.24	2.16	2.42	1.88	1.93	2.05	2.16	2.58
2001	3.89	3.96	4.53	2.79	1.76	1.54	1.43	2.94	2.25	3.03	3.51	4.93	3.05
2002	5.24	6.72	5.42	3.93	3.18	2.44	2.14	1.54	2.15	2.16	2.57	3.35	3.40
2003	3.52	4.66	6.80	6.20	3.70	2.85	2.39	3.11	2.59	3.09	3.11	2.82	3.74
2004	2.94	5.86	6.33	5.39	4.30	2.77	2.89	3.76	3.43	3.90	3.61	4.53	4.14
2005	3.69	3.75	3.81	3.37	3.81	3.28	3.10	2.79	3.45	4.09	4.52	4.72	3.70
2006	4.14	3.31	5.05	6.10	3.34	2.66	2.55	3.02	2.66	3.42	3.79	3.84	3.66
2007	3.24	4.67	4.83	3.88	2.90	2.09	2.35	2.83	2.69	2.87	3.02	2.27	3.14
2008	2.48	3.00	3.64	1.54	1.80	1.49	1.43	1.34	1.86	2.08	2.50	1.59	2.06

FUENTE: Suarez . 2011. Estudio Hídrico de la Cuenca del río Santa. Cambio Climático en la Región Ancash.

CUADRO 1-9

CAUDALES PROMEDIOS MENSUALES DE LA ESTACIÓN DE QUITARACSA

FECHA	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC	MEDIA
1968	13.59	11.80	12.78	9.59	6.17	5.61	4.55	4.45	5.12	8.76	8.68	7.53	8.22
1969	6.87	12.35	24.80	21.27	9.32	7.56	5.87	5.79	5.48	7.73	9.00	13.92	10.83
1970	21.02	16.59	15.39	18.04	9.51	6.94	5.58	5.33	5.78	8.22	9.39	10.78	11.05
1971	14.00	18.55	20.65	15.34	9.51	6.94	5.58	5.33	5.78	8.22	7.67	13.81	10.95
1972	12.26	15.21	16.85	19.88	9.51	6.94	5.58	4.55	4.84	7.49	11.49	8.81	10.28
1973	14.40	19.78	25.03	22.21	12.00	9.93	8.13	5.86	6.66	11.03	12.68	12.64	13.36
1974	17.96	34.75	24.82	17.14	10.26	8.70	7.63	7.31	6.24	7.94	7.77	10.83	13.45
1975	18.31	17.35	26.08	17.75	13.29	7.30	5.43	5.50	6.88	9.28	8.51	7.39	11.92
1976	14.02	13.03	16.42	12.27	7.18	5.84	5.01	4.64	4.75	5.71	6.07	6.17	8.43
1977	13.39	21.08	17.86	12.13	8.57	6.51	5.06	5.45	5.22	6.27	8.73	7.86	9.84
1978	7.56	12.15	11.83	8.41	6.43	5.77	5.64	5.01	6.63	6.04	7.46	8.85	7.65
1979	7.90	14.70	26.20	11.83	8.15	6.35	5.81	5.57	5.61	6.18	8.38	8.26	9.58
1980	9.30	9.39	10.73	10.15	6.88	6.57	5.04	5.38	6.30	8.89	9.48	12.60	8.39
1981	11.04	24.44	18.90	11.47	7.01	5.59	4.92	4.58	4.00	7.28	13.37	17.10	10.81
1982	13.89	16.56	13.70	13.94	8.35	5.96	4.88	4.89	5.19	9.30	10.75	14.00	10.12
1983	16.18	12.36	26.27	19.42	10.55	9.38	11.17	13.05	12.33	13.15	10.55	7.21	13.47
1984	11.25	22.19	16.55	14.48	13.01	11.95	8.11	6.17	6.07	8.73	7.39	7.78	11.14
1985	8.95	12.41	12.21	13.13	8.19	6.55	6.18	5.73	7.24	7.63	8.08	8.37	8.72
1986	14.15	14.14	14.31	17.88	8.33	5.75	4.19	3.74	4.87	6.01	9.45	10.89	9.48
1987	21.50	18.35	14.96	11.13	8.14	6.00	5.42	5.24	5.75	5.43	8.48	10.66	10.09
1988	19.64	20.58	14.03	17.05	10.53	7.02	6.14	5.87	6.06	9.24	10.31	8.40	11.24
1989	14.53	19.09	20.18	15.88	8.98	7.52	4.79	4.86	6.00	10.02	7.57	8.18	10.63
1990	9.30	11.85	11.21	8.37	6.72	7.03	5.43	4.72	4.65	8.51	9.76	9.58	8.09
1991	10.14	12.45	27.87	10.74	10.06	7.54	6.25	6.46	6.16	8.43	10.43	11.37	10.66
1992	9.59	10.12	15.97	11.64	9.88	7.13	5.95	5.62	7.17	12.43	9.54	9.69	9.56
1993	12.11	23.94	25.59	15.26	10.08	7.34	5.46	4.13	6.30	8.38	10.40	15.07	12.01
1994	19.25	24.61	28.00	24.58	11.80	7.13	5.61	5.21	5.39	5.00	6.85	14.81	13.19
1995	12.86	14.25	19.68	15.70	6.32	4.94	3.72	3.99	5.47	5.98	9.95	8.42	9.27
1996	21.46	26.80	25.66	24.64	10.85	7.53	6.48	6.11	5.95	8.84	8.14	9.92	13.53
1997	7.38	14.84	10.52	6.98	5.72	4.68	4.04	3.93	4.58	5.71	11.02	21.81	8.43
1998	22.44	25.21	19.82	17.96	9.57	8.23	6.97	6.22	6.36	10.12	12.72	8.96	12.88
1999	16.10	30.36	16.99	15.16	8.02	6.47	4.60	4.18	6.29	9.55	10.06	14.79	11.88
2000	18.14	26.54	20.71	13.68	9.73	7.02	5.41	4.11	5.41	5.99	9.10	10.94	11.40
2001	12.76	19.44	26.86	21.15	10.90	7.86	5.95	6.33	6.06	9.02	8.76	7.35	11.87
2002	9.19	24.56	24.94	18.57	13.34	8.05	7.42	8.15	8.00	12.03	8.59	12.08	12.91
2003	11.29	13.85	14.40	12.33	12.31	9.45	8.13	7.51	8.59	13.12	10.74	11.84	11.13
2004	12.29	11.02	18.98	21.00	9.68	7.30	6.21	6.35	6.28	10.21	9.97	10.08	10.78
2005	9.81	18.57	18.73	13.84	8.83	6.14	5.81	5.89	6.18	8.17	8.93	5.76	9.72
2006	7.66	12.13	14.26	6.46	5.68	4.71	3.54	2.62	4.08	5.07	8.98	4.73	6.66
2007	10.34	19.96	18.74	7.16	7.61	7.35	6.76	7.25	6.95	6.84	8.21	7.59	9.56
2008	10.48	16.31	19.73	11.61	7.07	5.61	4.71	3.61	3.82	6.02	10.94	11.23	9.26

FUENTE: Suarez . 2011. Estudio Hídrico de la Cuenca del río Santa. Cambio Climático en la Región Ancash.

## ANEXO 2

### SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE YULE – WALKER

Como se ha indicado la solución de estas ecuaciones permiten hallar los valores de los coeficientes de autocorrelación parcial ACP ( $\phi$ ). Es preciso indicar estos coeficientes de autocorrelación parcial se calculan para modelos autorregresivos. En este anexo se presentan las ecuaciones hasta  $k=5$ .

Para  $k = 0$  se tiene

$$\rho_0 = \phi_0 \quad (2.1)$$

Para  $k = 1$  se tiene, de la ecuación (4.50) se tiene:

$$\rho_1 = \phi_1 \rho_0 = \phi_1 \quad (2.2)$$

De la ecuaciones (4.50) y (4.51) para  $k=2$  se tiene:

$$\begin{aligned} \phi_1 \rho_0 + \phi_2 \rho_1 &= \rho_1 \\ \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_0 &= \rho_2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

De la ecuaciones (4.50) y (4.51) para  $k=3$  se tiene:

$$\begin{aligned} \phi_1 \rho_0 + \phi_2 \rho_1 + \phi_3 \rho_2 &= \rho_1 \\ \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_0 + \phi_3 \rho_1 &= \rho_2 \\ \phi_1 \rho_2 + \phi_2 \rho_1 + \phi_3 \rho_0 &= \rho_3 \end{aligned} \quad (2.4)$$

De la ecuaciones (4.50) y (4.51) para  $k=4$  se tiene:

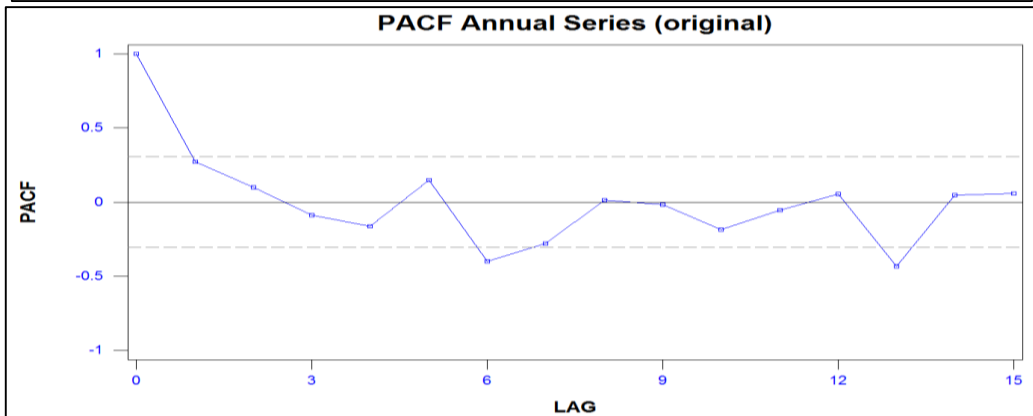
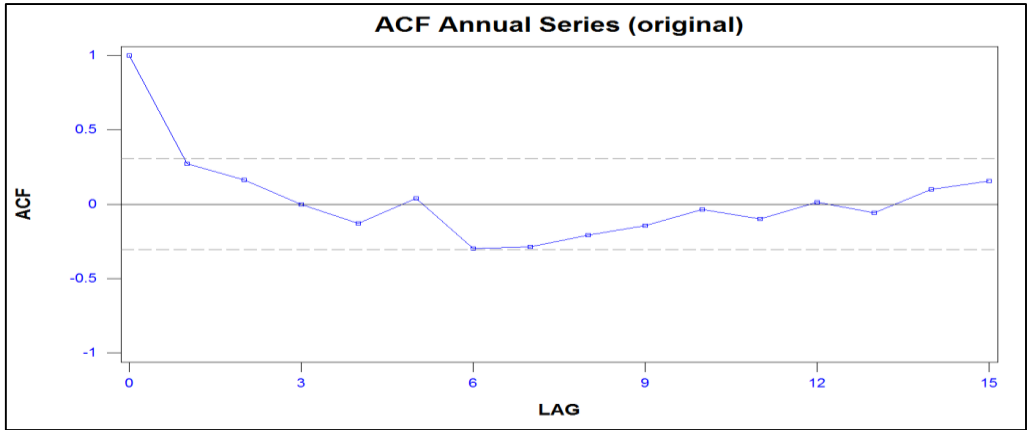
$$\begin{aligned} \phi_1 \rho_0 + \phi_2 \rho_1 + \phi_3 \rho_2 + \phi_4 \rho_3 &= \rho_1 \\ \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_0 + \phi_3 \rho_1 + \phi_4 \rho_2 &= \rho_2 \\ \phi_1 \rho_2 + \phi_2 \rho_1 + \phi_3 \rho_0 + \phi_4 \rho_1 &= \rho_3 \\ \phi_1 \rho_3 + \phi_2 \rho_2 + \phi_3 \rho_1 + \phi_4 \rho_0 &= \rho_4 \end{aligned} \quad (2.5)$$

De la ecuaciones (4.50) y (4.51) para  $k=5$  se tiene:

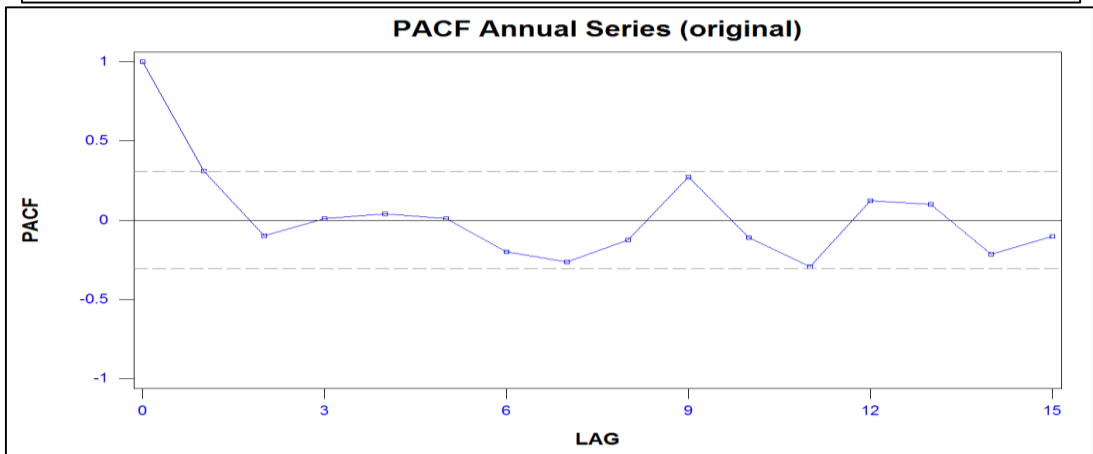
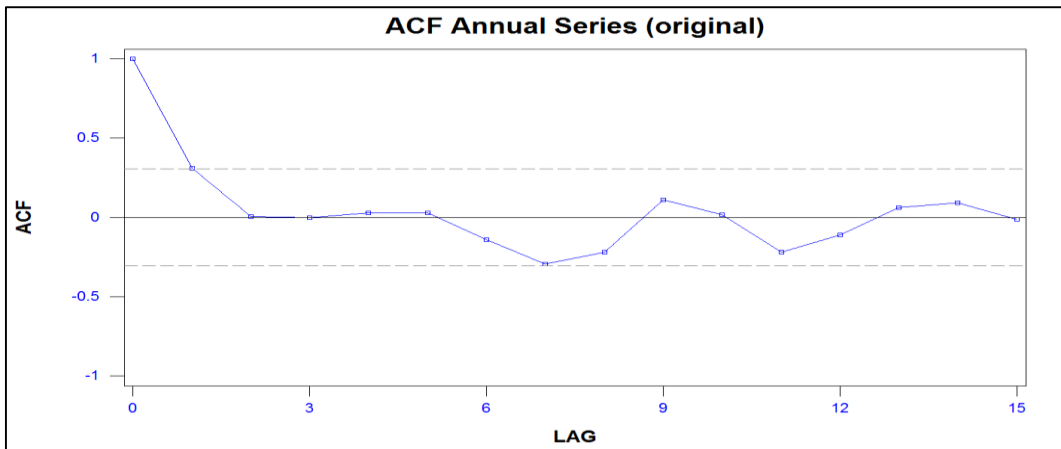
$$\begin{aligned} \phi_1 \rho_0 + \phi_2 \rho_1 + \phi_3 \rho_2 + \phi_4 \rho_3 + \phi_5 \rho_4 &= \rho_1 \\ \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_0 + \phi_3 \rho_1 + \phi_4 \rho_2 + \phi_5 \rho_3 &= \rho_2 \\ \phi_1 \rho_2 + \phi_2 \rho_1 + \phi_3 \rho_0 + \phi_4 \rho_1 + \phi_5 \rho_2 &= \rho_3 \\ \phi_1 \rho_3 + \phi_2 \rho_2 + \phi_3 \rho_1 + \phi_4 \rho_0 + \phi_5 \rho_1 &= \rho_4 \\ \phi_1 \rho_4 + \phi_2 \rho_3 + \phi_3 \rho_2 + \phi_4 \rho_1 + \phi_5 \rho_0 &= \rho_5 \end{aligned} \quad (2.6)$$

**ANEXO 3**  
**CORRELOGRAMAS DE LOS DATOS OBSERVADOS**

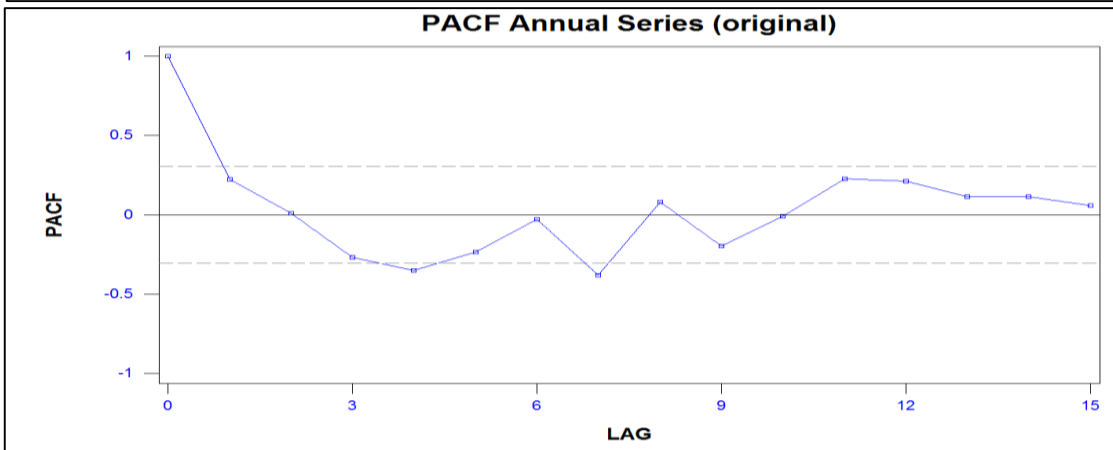
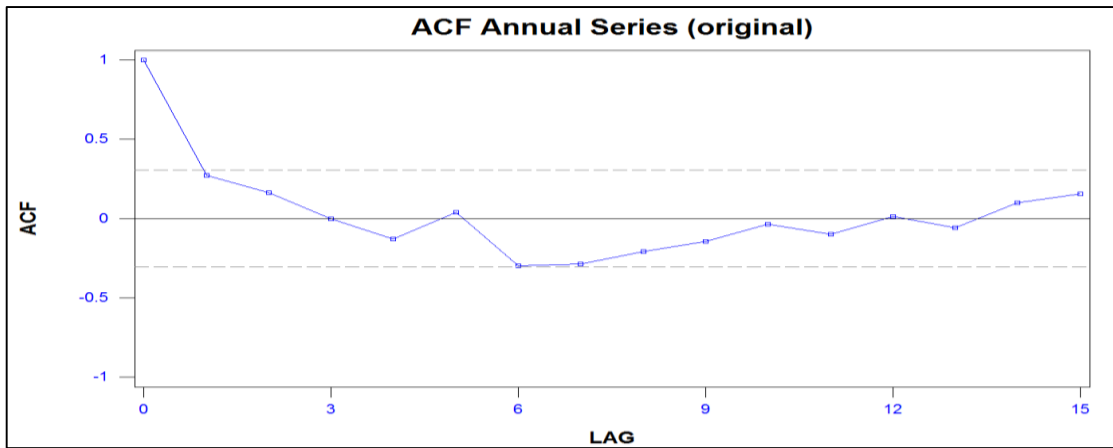




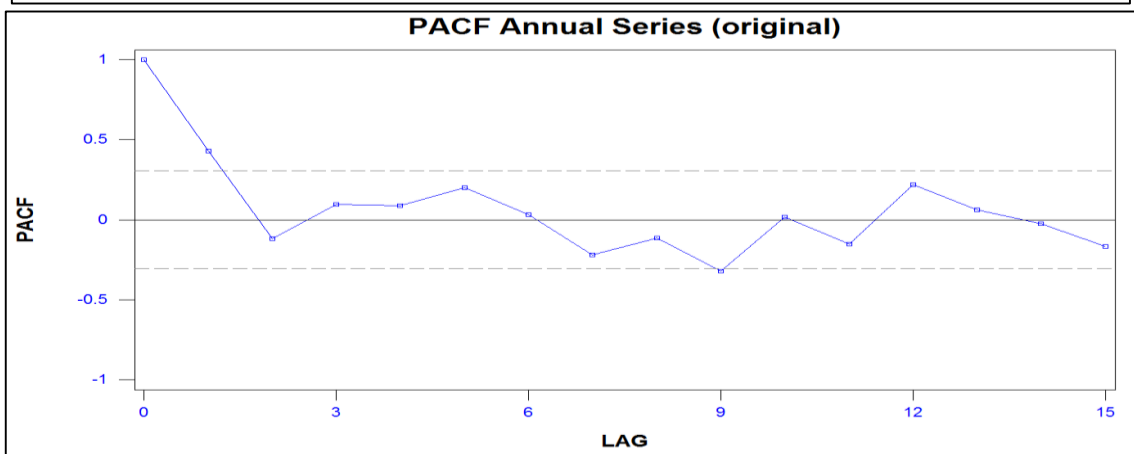
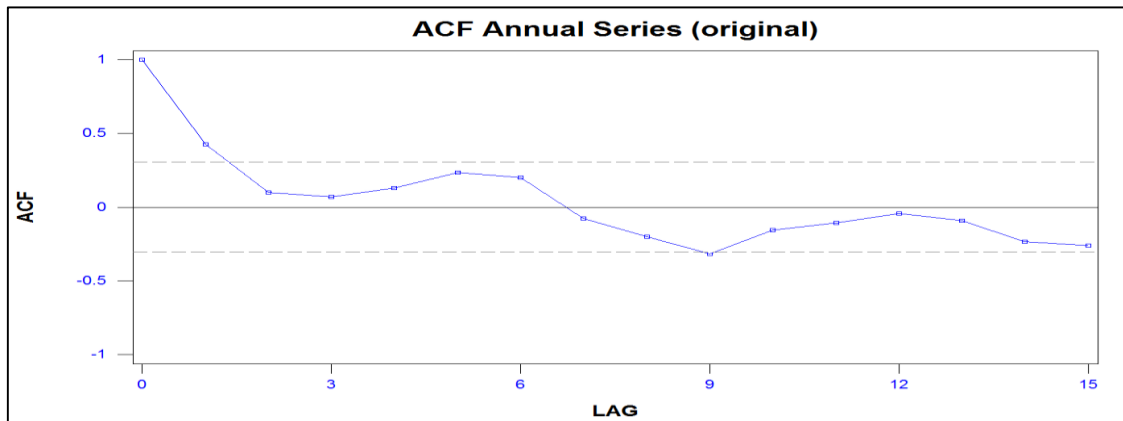
3-1 CORRELOGRAMAS DE LA ESTACIÓN QUEROCOCHA



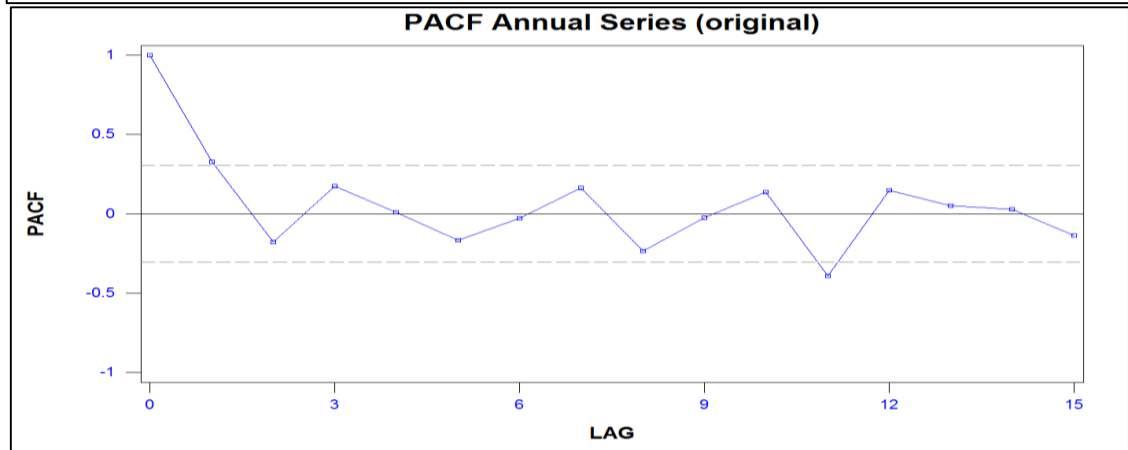
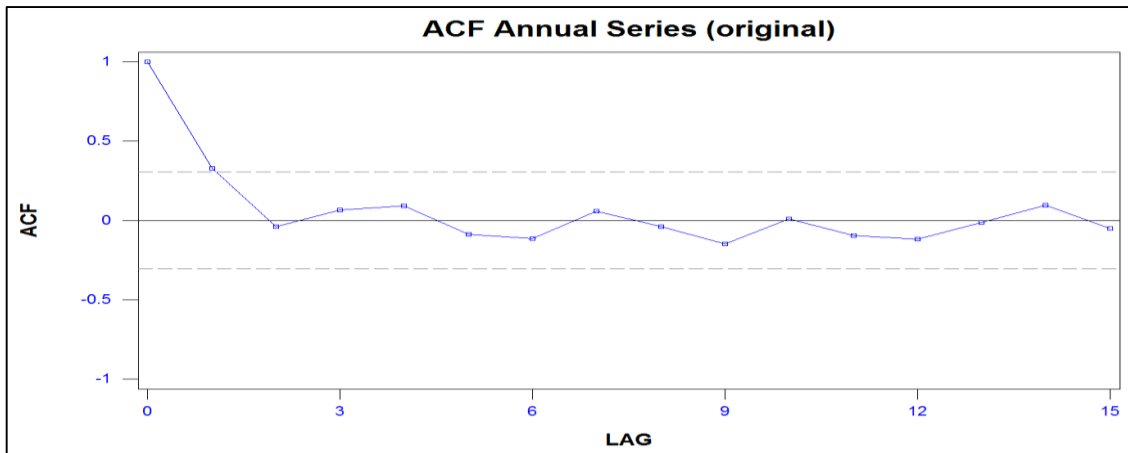
3-2 CORRELOGRAMAS DE LA ESTACIÓN OLLEROS



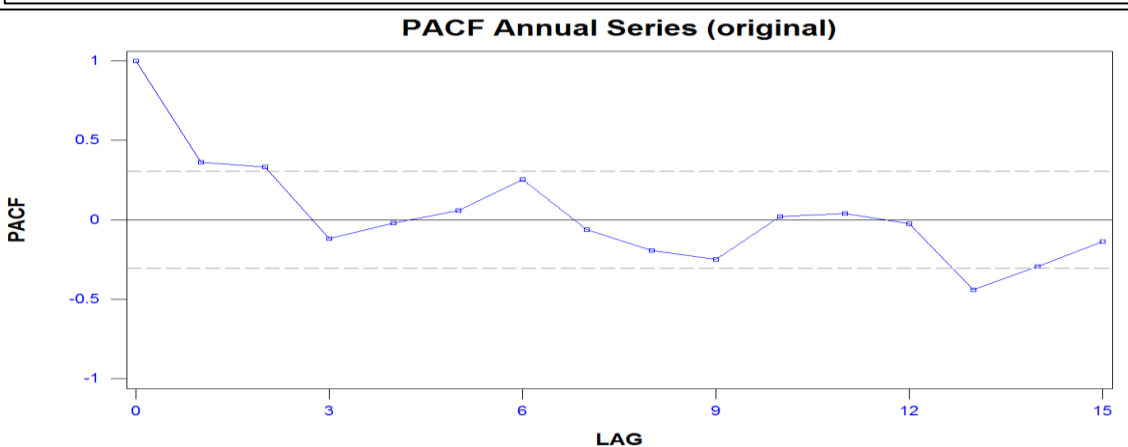
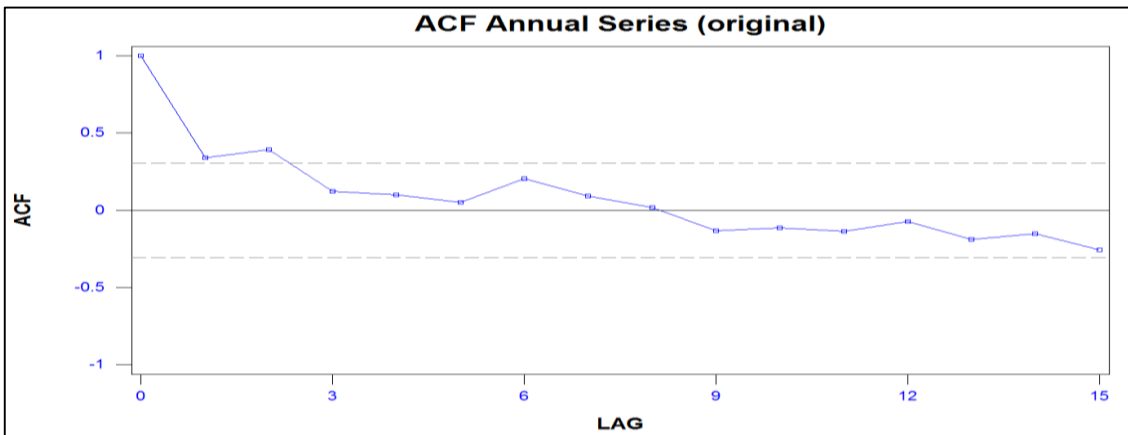
3-3 CORRELOGRAMAS DE LA ESTACIÓN QUILLCAY



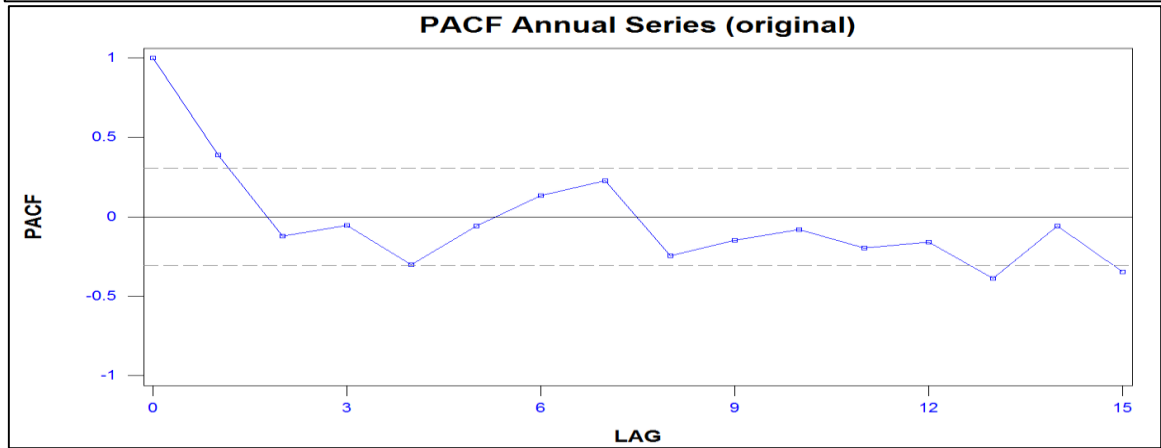
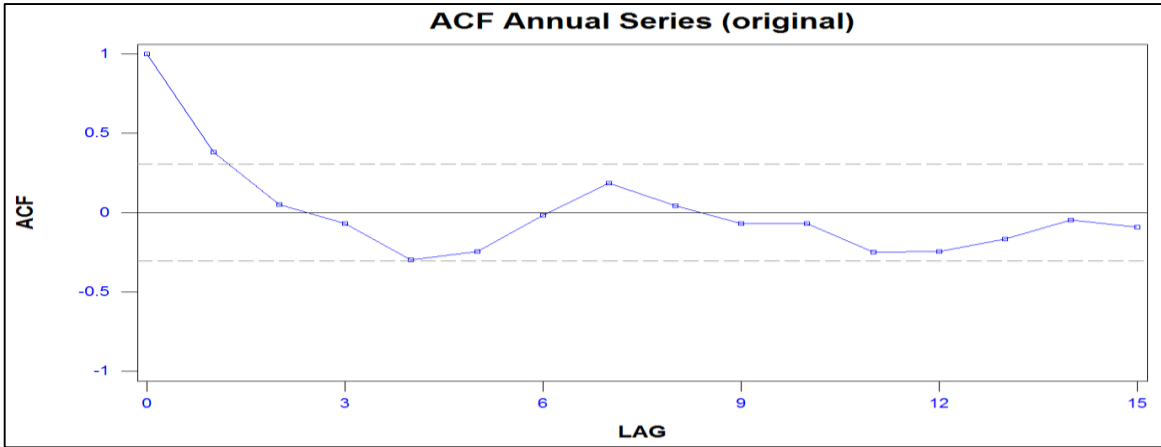
3-4 CORRELOGRAMAS DE LA ESTACIÓN CHANCOS



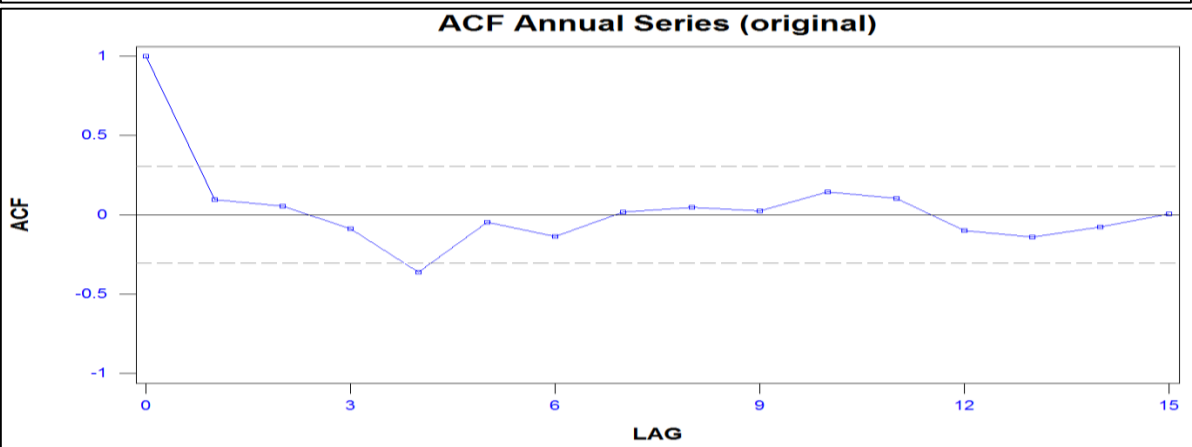
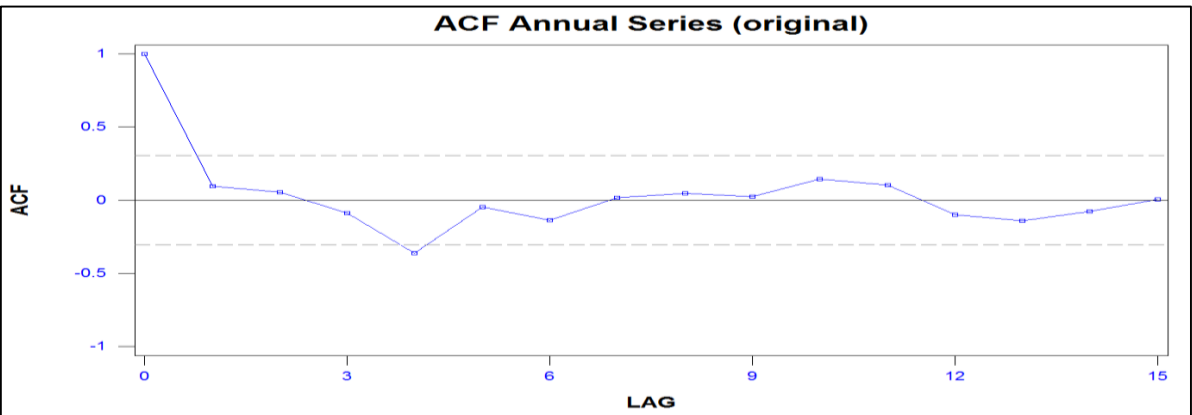
3-5 CORRELOGRAMAS DE LA ESTACIÓN LLANGANUCO



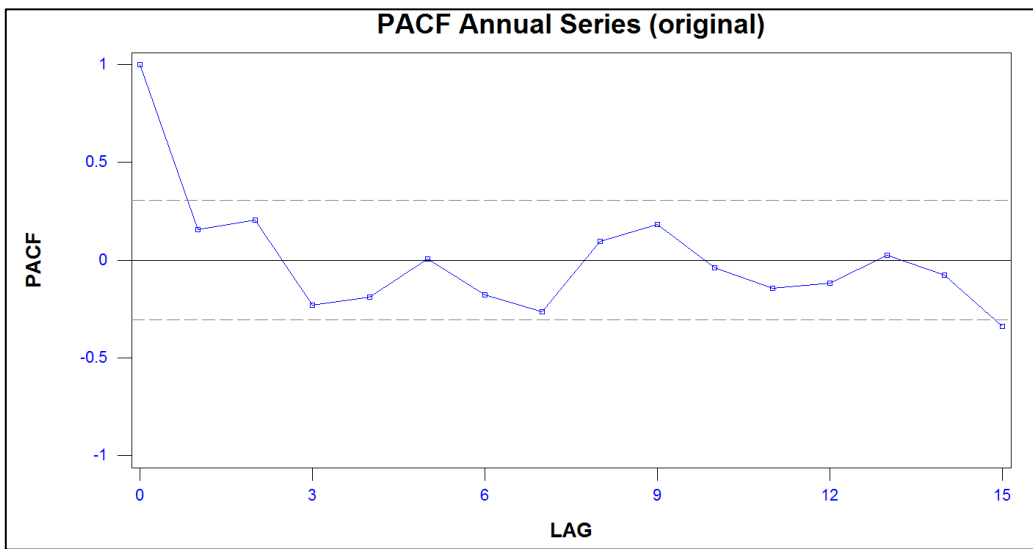
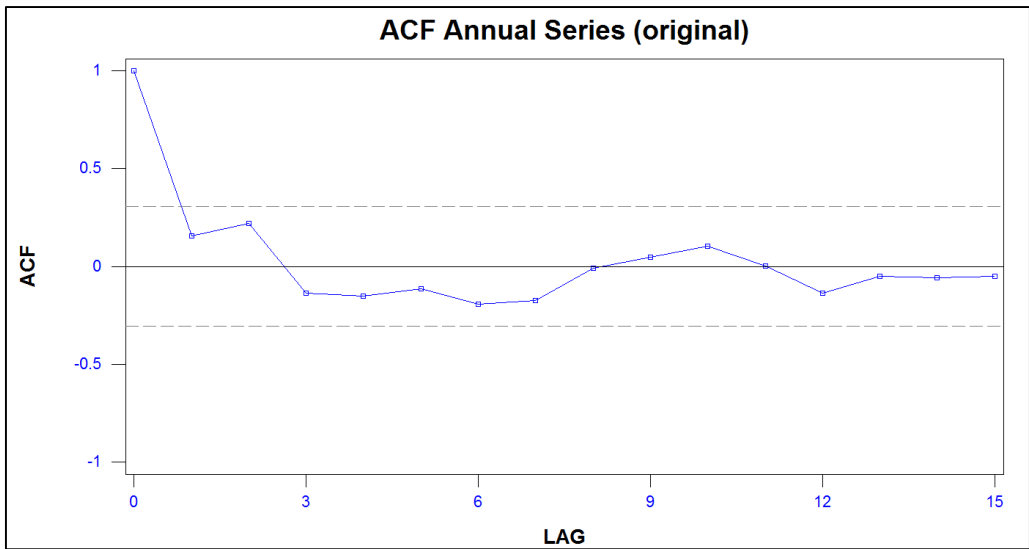
3-6 CORRELOGRAMAS DE LA ESTACIÓN PARON



3-7 CORRELOGRAMAS DE LA ESTACIÓN COLCAS



3-8 CORRELOGRAMAS DE LA ESTACIÓN LOS CEDROS



3-9 CORRELOGRAMAS DE LA ESTACIÓN LOS CEDROS

**ANEXO 4**  
**PARÁMETROS DE LOS MODELOS AUTORREGRESIVOS. AR (p)**

**i.1 Modelos autorregresivos de orden 1 AR(1)**

Este modelo está dada por la ecuación (12) para p=1:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \delta + \varepsilon_t \quad (4.1)$$

La media de este modelo se obtiene de la ecuación (15):

$$\mu = \frac{\delta}{1-\phi_1} \quad (4.2)$$

La varianza  $\gamma_o$  de este modelo se obtiene asumiendo la estacionaridad de tal manera que la variancia es constante para  $|\phi_1| < 1$ , y estableciendo  $\delta = 0$  que equivale a medir  $y_t$  en función de las desviaciones alrededor de su media, dado por la ecuación (16), es decir la ecuación (16) está expresada por  $y_t - \mu = \phi_1(y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$ .

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (4.3)$$

Entonces la varianza  $\gamma_o$  se obtiene mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \gamma_o &= E[(y_t)^2] = E[(\phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t)^2] = E(\phi_1^2 y_{t-1}^2 + 2\phi_1 y_{t-1} \varepsilon_t + \varepsilon_t^2) \\ \gamma_o &= E(\phi_1^2 y_{t-1}^2) + E(2\phi_1 y_{t-1} \varepsilon_t) + E(\varepsilon_t^2) \\ \gamma_o &= \phi_1^2 E(y_{t-1}^2) + 2\phi_1 E(y_{t-1} \varepsilon_t) + E(\varepsilon_t^2) \end{aligned} \quad (4.4)$$

El valor esperado está dado por la siguiente ecuación (Díaz 2010)

$$E(x_t) = \sum_{t=1}^n P_i x_t \quad (4.5)$$

Donde:

$P_i$  = probabilidad de ocurrencia de  $x_t$

n= tamaño de la población

$x_t$  = variable aleatoria

Reemplazando la ecuación (4.5) en la ecuación (4.4) se tiene:

$$\gamma_o = \phi_1^2 \sum_{t=1}^n P_i y_{t-1}^2 + 2\phi_1 \sum_{t=1}^n P_i y_{t-1} \varepsilon_t + \sum_{t=1}^n P_i \varepsilon_t^2 \quad (4.6)$$

Se sabe que:

$$\sum_{t=1}^n P_i \varepsilon_t^2 = \sum_{t=1}^n P_i (\varepsilon_t - 0)^2 = E[(\varepsilon_t - 0)^2] = \sigma_\varepsilon^2 \quad (4.7)$$

$$\sum_{t=1}^n P_i y_{t-1}^2 = E[(y_{t-1})(y_{t-1})] = E[(y_{t-1})^2] = \gamma_o \quad (4.8)$$

$$\sum_{t=1}^n P_i y_{t-1} \varepsilon_t = 0 \quad (4.9)$$

La ecuación (5.9) se demuestra de la siguiente manera:

$$y_{t-1} = \phi_1 y_{t-2} + \delta + \varepsilon_{t-1} \quad (4.10)$$

Sustituyendo la ecuación (4.10) en la ecuación (4.1) se tiene:

$$\begin{aligned} y_t &= \phi_1(\phi_1 y_{t-2} + \delta + \varepsilon_{t-1}) + \delta + \varepsilon_t \\ y_t &= \phi_1^2 y_{t-2} + \phi_1 \delta + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \delta + \varepsilon_t \end{aligned} \quad (4.11)$$

Por sustituciones sucesivas se obtiene:

$$y_t = (\delta + \delta\phi_1 + \delta\phi_1^2 + \dots) + (\varepsilon_t + \phi_1\varepsilon_{t-1} + \phi_1^2\varepsilon_{t-2} + \dots) \quad (4.12)$$

$$y_{t-1} = (\delta + \delta\phi_1 + \delta\phi_1^2 + \dots) + (\varepsilon_{t-1} + \phi_1\varepsilon_{t-2} + \phi_1^2\varepsilon_{t-3} + \dots) \quad (4.13)$$

Reemplazando el valor de la media (ecuación 4.2) en la ecuación (4.13) y como el coeficiente de cada variable  $\varepsilon_{t-k}$  de la ecuación (4.13) es  $\phi_1^k$ , se tiene:

$$y_{t-k} = \frac{\delta}{1-\phi_1} + (\varepsilon_{t-k} + \phi_1\varepsilon_{t-k-1} + \phi_1^2\varepsilon_{t-k-2} + \dots) = \frac{\delta}{1-\phi_1} + \sum_{s=0}^{\infty} \phi_1^s \varepsilon_{t-k-s} \quad (4.14)$$

Multiplicando la ecuación (4.14) por  $\varepsilon_t$  se obtiene lo siguiente:

$$y_{t-k}\varepsilon_t = \frac{\delta\varepsilon_t}{1-\phi_1} + \varepsilon_t \sum_{s=0}^{\infty} \phi_1^s \varepsilon_{t-k-s} \quad (4.15)$$

Como la variable  $\varepsilon_t$  es un ruido blanco (variable aleatoria independiente) el valor esperado de la ecuación (4.15) es:

$$E(y_{t-k}\varepsilon_t) = E\left(\frac{\delta\varepsilon_t}{1-\phi_1} + \varepsilon_t \sum_{s=0}^{\infty} \phi_1^s \varepsilon_{t-k-s}\right) = \frac{\delta}{1-\phi_1} E(\varepsilon_t) + \sum_{s=0}^{\infty} \phi_1^s E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k-s}) = 0 + 0 = 0 \quad (4.16)$$

Entonces para variables aleatorias independientes se cumple:

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k-s}) = E(\varepsilon_t)E(\varepsilon_{t-k-s}) = 0 \quad (4.17)$$

Por consiguiente de las ecuaciones (4.16) y (4.17) se obtiene:

$$E(y_{t-1}\varepsilon_t) = \frac{\delta}{1-\phi_1} E(\varepsilon_t) + \sum_{s=0}^{\infty} \phi_1^s E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1-s}) = 0 \quad (4.18)$$

Reemplazando las ecuaciones (4.8), (4.17) y (4.18) en la ecuación (4.6) se tiene:

$$\gamma_0 = \phi_1^2\gamma_0 + 0 + \sigma_\varepsilon^2 \quad (4.19)$$

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi_1^2} \quad (4.20)$$

Las covariancias de  $Y_t$  alrededor de su media son:

$$\gamma_1 = E[Y_{t-1}(Y_t)] = E[Y_{t-1}(\phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t)] = \phi_1 E[Y_{t-1}(Y_{t-1})] + E[Y_{t-1}\varepsilon_t] = \phi_1\gamma_0 + 0 = \phi_1\gamma_0 \quad (4.21)$$

Reemplazando la ecuación (4.20) en (4.21) se tiene:

$$\gamma_1 = \phi_1 \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi_1^2} = \phi_1\gamma_0 \quad (4.22)$$

$$\gamma_2 = E[Y_{t-2}(Y_{t-1})] = E[Y_{t-2}(\phi_1^2 Y_{t-2} + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t)] = \phi_1^2 \gamma_0 \quad (4.23)$$

De las ecuaciones (4.22) y (4.23) se obtiene la covarianza para un desplazamiento de  $k$  retardos:

$$\gamma_k = \phi_1^k \gamma_0 = \phi_1^k \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi_1^2} \quad (4.24)$$

La función de autocorrelación para AR(1) está dada por la siguiente ecuación:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi_1^k \quad (4.25)$$

## i.2 Modelos autorregresivos de orden 2. AR(2)

Estos modelos tienen  $p=2$ , reemplazando este valor en la ecuación (12) se obtiene:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \delta + \varepsilon_t \quad (4.26)$$

De la ecuación (15) se obtiene la media  $\mu$  del proceso:

$$\mu = \frac{\delta}{1-\phi_1-\phi_2} \quad (4.27)$$

La condición necesaria para la estacionaridad es  $\phi_1 + \phi_2 < 1$ , para este proceso de orden 2. La varianza del modelo autorregresivo alrededor de su media en forma de desviación de orden 2 se calcula de la siguiente manera:

$$\gamma_0 = E[(\phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t)^2] = E(y_t(\phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t)) \quad (4.28)$$

$$\gamma_0 = \phi_1 E[y_t y_{t-1}] + \phi_2 E[y_t y_{t-2}] + E(y_t \varepsilon_t) \quad (4.29)$$

Resolviendo las componentes de la ecuación (4.29) se tiene:

$$E[y_t y_{t-1}] = \gamma_1 \text{ ver ecuación (4.21)} \quad (4.30)$$

$$E[(y_t)(y_{t-2})] = \gamma_2 \text{ ver ecuación (4.23)} \quad (4.31)$$

$$E(y_t \varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 \quad (4.32)$$

La ecuación (4.32) se demuestra de la siguiente manera:

$$y_t \varepsilon_t = (\phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t) \varepsilon_t = \phi_1 y_{t-1} \varepsilon_t + \phi_2 y_{t-2} \varepsilon_t + \varepsilon_t \varepsilon_t = \quad (4.33)$$

$$E[y_t \varepsilon_t] = E[\phi_1 y_{t-1} \varepsilon_t + \phi_2 y_{t-2} \varepsilon_t + \varepsilon_t \varepsilon_t] = 0 + 0 + \sigma_\varepsilon^2 \quad (4.34)$$

Reemplazando las ecuaciones (4.30), (4.31) y (4.32) en (4.29) se obtiene:

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \sigma_\varepsilon^2 \quad (4.35)$$

La covarianza para el rezago de orden 2 donde  $K=1$  se calcula de la siguiente manera:

$$\gamma_1 = E[(y_t)(y_{t-1})] = E[(y_{t-1})(\phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t)]$$

$$\gamma_1 = \phi_1 E(y_{t-1} y_{t-1}) + \phi_2 E[y_{t-1} y_{t-2}] + E[y_{t-1} \varepsilon_t]$$

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1 + 0 = \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1 \quad (4.36)$$

La covarianza para el rezago  $K=2$  de orden 2 se calcula de la siguiente manera:

$$\gamma_2 = E[(y_t)(y_{t-2})] = E[(y_{t-2})(\phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t)]$$

$$\gamma_2 = \phi_1 E(y_{t-1} y_{t-2}) + \phi_2 E[y_{t-2} y_{t-2}] + E[y_{t-2} \varepsilon_t]$$

$$\gamma_2 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_0 + 0 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_0 \quad (4.37)$$

Generalizando para  $k \geq 2$ , se tiene:

$$\gamma_k = E[(y_t)(y_{t-k})] = E[(y_{t-k})(\phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t)] = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} \quad (4.38)$$

De la ecuación (4.36) se obtiene:

$$\gamma_1 = \frac{\phi_1 \gamma_0}{1-\phi_2} \quad (4.39)$$

Reemplazando la ecuación (4.37) en (4.35) se tiene:



$$\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + \phi_2(\phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_0) + \sigma_\varepsilon^2 = \phi_1\gamma_1 + \phi_1\phi_2\gamma_1 + \phi_2^2\gamma_0 + \sigma_\varepsilon^2 \quad (4.40)$$

Reemplazando (4.40) en (4.39) se obtiene:

$$\gamma_0 = \phi_1 \frac{\phi_1\gamma_0}{1-\phi_2} + \phi_1\phi_2 \frac{\phi_1\gamma_0}{1-\phi_2} + \phi_2^2\gamma_0 + \sigma_\varepsilon^2 \quad (4.41)$$

$$\gamma_0 = \frac{(1-\phi_2)\sigma_\varepsilon^2}{(1+\phi_2)[(1-\phi_2)^2-\phi_1^2]} \quad (4.42)$$

La autocorrelación  $\rho_k$  para rezagos  $k=1, 2, \dots$  se pueden obtener mediante las siguientes ecuaciones:

$$\rho_1 = \frac{\frac{\phi_1\gamma_0}{1-\phi_2}}{\gamma_0} = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} \quad (4.43)$$

$$\rho_2 = \frac{\phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_0}{\gamma_0} = \frac{\phi_1 \frac{\phi_1\gamma_0}{1-\phi_2} + \phi_2\gamma_0}{\gamma_0} = \phi_2 + \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} \quad (4.44)$$

Generalizando el coeficiente de autocorrelación para el modelo AR(2) para  $k \geq 2$  se obtiene de la ecuación (4.37):

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2} \quad (4.45)$$

La ecuación (4.45) se usa para la función de autocorrelación parcial. Las ecuaciones (4.43) y (4.44) son conocidas como las ecuaciones de Yule-Walker.

La función de autocorrelación parcial para el modelo autorregresivo de orden  $p$ , se determina de la siguiente manera:

Como primer paso se determina la covarianza para un desplazamiento o rezago  $k$  mediante la siguiente ecuación:

$$\gamma_k = E[y_{t-k}(\phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t)] \quad (4.46)$$

Para los diferentes valores de  $k = 0, 1, \dots, p$  se obtienen  $p+1$  ecuaciones, como se muestra a continuación:

$$\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_2 + \dots + \phi_p\gamma_p + \sigma_\varepsilon^2 \quad (4.47)$$

$$\gamma_1 = \phi_1\gamma_0 + \phi_2\gamma_1 + \dots + \phi_p\gamma_{p-1} \quad (4.48)$$

En general para  $k=p$  se tiene:

$$\gamma_p = \phi_1\gamma_{p-1} + \phi_2\gamma_{p-2} + \dots + \phi_p\gamma_0 \quad (4.49)$$

Al dividir a ambos miembros de las ecuaciones (4.48) y (4.49) entre  $\gamma_0$  se obtienen un conjunto de  $p$  ecuaciones que juntas determinan los primeros  $p$  valores de función de autocorrelación:

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2\rho_1 + \dots + \phi_p\rho_{p-1} \quad (4.50)$$

En general para  $p$  menores que  $k$  se tiene:

$$\rho_p = \phi_1\rho_{p-1} + \phi_2\rho_{p-2} + \dots + \phi_p \quad (4.51)$$

Además se cumple que:

$$\rho_0 = 1 \quad (\text{ver ecuación 8}) \quad (4.52)$$

$$\rho_p = \rho_{-p} \quad (\text{ver ecuación 11}) \quad (4.53)$$

Las ecuaciones (5.50) y (5.51) son las ecuaciones de Yule-Walker, si se conocen  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$  (estos coeficientes de autocorrelación se estiman a partir de los datos muestrales). Estas ecuaciones se resuelven para encontrar los valores de:  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ .

La función de autocorrelación parcial consiste en calcular los valores de  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$  para cada p, entonces se tendrían las siguientes ecuaciones:

Para p=1, se tendrá una sola ecuación obtenida de la ecuación (4.50):

$$\rho_1 = \phi_1 \rho_0 = \phi_1 \quad (4.54)$$

Para p=2, 3, ... las respectivas ecuaciones se muestran en el anexo 2. La matriz de ecuaciones se puede resolver mediante el software MATLAB. Los coeficientes de autocorrelaciones parciales son los valores o estimadores de  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ . La solución de la matriz es para cada orden de p (ver anexo 2).

La solución de las ecuaciones de Yule-Walker requiere del conocimiento de p (orden del proceso autorregresivo). Por lo tanto las ecuaciones de Yule – Walker se resuelven para valores sucesivos de p, es decir la solución se realiza suponiendo el primer valor de p=1, y se obtiene  $\rho_1 = \phi_1$  (ver ecuación 4.54) y en un muestra se tendría  $\hat{\rho}_1 = \hat{\phi}_1$ . Si el valor calculado de  $\hat{\phi}_1$  es significativamente diferente de cero, se afirma que el modelo autorregresivo es de orden 1.

Para modelo de autorregresivo de orden 2 AR(2) de la ecuación (4.41) se tiene:

$$\gamma_0 = \phi_1 \frac{\phi_1 \gamma_0}{1-\phi_2} + \phi_1 \phi_2 \frac{\phi_1 \gamma_0}{1-\phi_2} + \phi_2^2 \gamma_0 + \sigma_\varepsilon^2 = \gamma_0 \left( \phi_1 \frac{\phi_1}{1-\phi_2} + \phi_1 \phi_2 \frac{\phi_1}{1-\phi_2} + \phi_2^2 \right) + \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_0 = \gamma_0 \left[ \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \left( \phi_1 \frac{\phi_1}{1-\phi_2} + \phi_2 \right) \right] + \sigma_\varepsilon^2 = \gamma_0 (\phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_2) + \sigma_\varepsilon^2 =$$

$$\gamma_0 [1 - (\phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_2)] = \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - (\phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_2)} \quad (4.55)$$

Generalizando para cualquier valor de p se tiene:

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \sum_{j=1}^p \phi_j \rho_j} \quad (4.56)$$

**ANEXO 5**  
**PARÁMETROS DE LOS MODELOS DE MEDIAS MÓVILES. MA(q)**

**i Modelos de medias móviles (MA)**

Pindyck y Rubinfeld (2001) indican que en el proceso de media móvil de orden q cada observación  $Y_t$  es generada por un promedio ponderado de perturbaciones aleatorias que se remontan a q periodos. Este modelo se denota por MA(q) y la ecuación que describe es:

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q} \quad (5.1)$$

Donde:

$\theta_1, \dots, \theta_q$  = parámetros del modelo, que pueden ser positivos o negativos.

$\varepsilon_t, \dots, \varepsilon_{t-q}$  = variables aleatorias que están distribuidas en forma independiente a lo largo del tiempo, son variables generadas por un proceso de ruido blanco.

$\mu$  = media

q = orden del modelo

Cada término de la variable  $\varepsilon_t$  es una variable aleatoria de distribución normal con media cero  $E(\varepsilon_t) = 0$  y varianza  $E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2$ , y covarianza  $\gamma_k = E[\varepsilon_t\varepsilon_{t-k}] = 0$  para  $k \neq 0$ .

La media del proceso de media móvil es independiente del tiempo, dado que:

$$\begin{aligned} E[Y_t] &= E[\mu + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q}] \\ E[Y_t] &= E[\mu] + E[\varepsilon_t] - \theta_1E[\varepsilon_{t-1}] - \theta_2E[\varepsilon_{t-2}] - \dots - \theta_qE[\varepsilon_{t-q}] \\ E[Y_t] &= \mu + 0 - 0 - 0 - \dots - 0 = \mu \end{aligned} \quad (5.2)$$

La esperanza matemática del proceso de ruido blanco  $\varepsilon_t, \dots, \varepsilon_{t-q}$  es 0.

La varianza denotado por  $\gamma_0$  del modelo de media móvil está dada por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} Var[Y_t] &= \gamma_0 = E[(Y_t - \mu)^2] = E[(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q})^2] \\ &= E[\varepsilon_t^2 + \theta_1^2\varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \theta_q^2\varepsilon_{t-q}^2 - 2\theta_1\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} - \dots] \\ &= \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2\sigma_\varepsilon^2 + \dots + \theta_q^2\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\varepsilon^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 \dots + \theta_q^2) \end{aligned} \quad (5.3)$$

**i.1 Modelo de medias móviles de orden 1 MA(1)**

Este tipo de modelo se obtiene de la ecuación (5.1) donde q=1:

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} \quad (5.4)$$

Este proceso tiene media  $\mu$  que se obtiene de la ecuación (5.2) y varianza:

$$\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2(1 + \theta_1^2) \quad (5.5)$$

Que se obtiene de la ecuación (6.5).

La covarianza o autocovarianza para un rezago k=1 es:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= E[(Y_t - \mu)(Y_{t-1} - \mu)] = E[(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} - \theta_1\varepsilon_{t-2})] \\ &= E[\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_t\theta_1\varepsilon_{t-2} - \varepsilon_{t-1}\theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_1\varepsilon_{t-1}\theta_1\varepsilon_{t-2}] \\ &= E[\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}] + E[-\varepsilon_t\theta_1\varepsilon_{t-2}] + E[-\varepsilon_{t-1}\theta_1\varepsilon_{t-1}] + E[\theta_1\varepsilon_{t-1}\theta_1\varepsilon_{t-2}] \end{aligned}$$

Aplicando los criterios establecidos en la ecuación (4.17) se obtiene:

$$\begin{aligned} &= 0 - 0 - \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}^2) = -\theta_1 E[(\varepsilon_{t-1} - 0)(\varepsilon_{t-1} - 0)] \\ \gamma_1 &= -\theta_1 \sigma_\varepsilon^2 \quad (5.6) \end{aligned}$$

En general la autocovarianza para un rezago k es:

$$\begin{aligned} \gamma_k &= E[(Y_t - \mu)(Y_{t-k} - \mu)] = E[(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-k} - \theta_1\varepsilon_{t-k-1})] \\ &= E[\varepsilon_t\varepsilon_{t-k} - \varepsilon_t\theta_1\varepsilon_{t-k-1} - \theta_1\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k} + \theta_1\varepsilon_{t-1}\theta_1\varepsilon_{t-k-1}] \\ &= E[\varepsilon_t\varepsilon_{t-k}] + E[-\varepsilon_t\theta_1\varepsilon_{t-k-1}] + E[-\varepsilon_{t-1}\theta_1\varepsilon_{t-k}] + E[\theta_1\varepsilon_{t-1}\theta_1\varepsilon_{t-k-1}] \\ \gamma_k &= 0 \quad \text{para } K > 1 \quad (5.7) \end{aligned}$$

Pindyck y Rubinfeld (2001) indican que el proceso de media móvil de orden 1 **MA(1)** tiene una covarianza de cero cuando el desplazamiento o desfase es mayor que un periodo. Entonces se afirma que el proceso tiene una memoria de un solo periodo; por lo tanto cualquier valor de  $Y_t$  está relacionado con  $Y_{t-1}$  y con  $Y_{t+1}$  pero con ningún otro valor de la serie de tiempo. El proceso no tiene relación con lo que sucedió más de un periodo en el pasado.

La función de autocorrelación para este proceso está dada por:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} \frac{-\theta_1\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2(1+\theta_1^2)} = \frac{-\theta_1}{(1+\theta_1^2)} & k = 1 \\ \frac{0}{\sigma_\varepsilon^2(1+\theta_1^2)} = 0 & k > 1 \end{cases} \quad (5.8)$$

## i.2 Modelo de medias móviles de orden 2. MA(2)

Este tipo de modelo se obtiene de la ecuación (5.1) donde q=2:

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} \quad (5.9)$$

Este proceso tiene media  $\mu$  que se obtiene de la ecuación (5.2) y varianza:

$$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma_\varepsilon^2 \quad (5.10)$$

Que se obtiene de la ecuación (5.3).

La covarianza o autocovarianza para un rezago k=1 es:

$$\gamma_1 = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-1} - \mu)] = E[(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-1} - \theta_1\varepsilon_{t-2} - \theta_2\varepsilon_{t-3})]$$

$$\begin{aligned}
&= E[\varepsilon_t \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_t \theta_1 \varepsilon_{t-2} - \varepsilon_t \theta_2 \varepsilon_{t-3} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \theta_1 \varepsilon_{t-2} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \theta_2 \varepsilon_{t-3} - \\
&\quad \theta_2 \varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} \theta_1 \varepsilon_{t-2} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} \theta_2 \varepsilon_{t-3}] \\
&= E[\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}] + E[-\varepsilon_t \theta_1 \varepsilon_{t-2}] + E[-\varepsilon_t \theta_2 \varepsilon_{t-3}] + E[-\theta_1 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}] \\
&\quad + E[\theta_1 \varepsilon_{t-1} \theta_2 \varepsilon_{t-3}] + E[\theta_2 \varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-1}] + E[\theta_2 \varepsilon_{t-2} \theta_1 \varepsilon_{t-2}] \\
&\quad + E[\theta_2 \varepsilon_{t-2} \theta_2 \varepsilon_{t-3}]
\end{aligned}$$

Aplicando los criterios establecidos en la ecuación (4.17) se obtiene:

$$\begin{aligned}
&= 0 + 0 + 0 - \theta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + 0 + 0 + 0 + \theta_1 \theta_2 \varepsilon_{t-2}^2 + 0 = -\theta_1^2 E[(\varepsilon_{t-1} - 0)(\varepsilon_{t-1} - \\
&\quad 0)] + \theta_1 \theta_2 E[(\varepsilon_{t-2} - 0)(\varepsilon_{t-2} - 0)] \\
\gamma_1 &= \sigma_\varepsilon^2 (-\theta_1 + \theta_1 \theta_2) = -\theta_1 (1 - \theta_2) \sigma_\varepsilon^2 \tag{5.11}
\end{aligned}$$

La covarianza o autocovarianza para un rezago  $k=2$  es:

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &= E[(Y_t - \mu)(Y_{t-2} - \mu)] = E[(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-2} - \theta_1 \varepsilon_{t-3} - \\
&\quad \theta_2 \varepsilon_{t-4})] \\
&= E[\varepsilon_t \varepsilon_{t-2} - \varepsilon_t \theta_1 \varepsilon_{t-3} - \varepsilon_t \theta_2 \varepsilon_{t-4} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \theta_1 \varepsilon_{t-3} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \theta_2 \varepsilon_{t-4} - \\
&\quad \theta_2 \varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-2} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} \theta_1 \varepsilon_{t-3} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} \theta_2 \varepsilon_{t-4}] \\
&= E[\varepsilon_t \varepsilon_{t-2}] + E[-\varepsilon_t \theta_1 \varepsilon_{t-3}] + E[-\varepsilon_t \theta_2 \varepsilon_{t-4}] + E[-\theta_1 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}] + \\
&\quad E[\theta_1 \varepsilon_{t-1} \theta_1 \varepsilon_{t-3}] + E[\theta_1 \varepsilon_{t-1} \theta_2 \varepsilon_{t-4}] - E[\theta_2 \varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-2}] + E[\theta_2 \varepsilon_{t-2} \theta_1 \varepsilon_{t-3}] + \\
&\quad E[\theta_2 \varepsilon_{t-2} \theta_2 \varepsilon_{t-4}]
\end{aligned}$$

Aplicando los criterios establecidos en la ecuación (4.17) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 - \theta_2 E[\varepsilon_{t-2}^2] + 0 + 0 = -\theta_2 E[(\varepsilon_{t-2} - 0)(\varepsilon_{t-2} - 0)] \\
\gamma_2 &= \theta_2 \sigma_\varepsilon^2 \tag{5.12}
\end{aligned}$$

$$\gamma_k = 0 \quad \text{para } k > 2 \tag{5.13}$$

La función de autocorrelación está dada por:

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{-\theta_1(1-\theta_2)\sigma_\varepsilon^2}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)\sigma_\varepsilon^2} = -\frac{\theta_1(1-\theta_2)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} \tag{5.14}$$

$$\rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{-\theta_2\sigma_\varepsilon^2}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)\sigma_\varepsilon^2} = \frac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} \tag{5.15}$$

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{0}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} = 0 \quad \text{para } k > 2 \tag{5.16}$$

Pindyck y Rubinfeld (2001), indican que en el proceso de media móvil de orden 2 **MA(2)** tiene una memoria exactamente de dos periodos de modo que el valor de  $Y_t$  es influido sólo por eventos que se presentan en el periodo actual, un periodo atrás y dos periodos atrás.

La identificación de un modelo MA(2) mediante su función de autocorrelación parcial es difícil al igual que ocurre con la función de autocorrelación simple de un proceso autorregresivo de orden 2 AR(2), mientras que es fácil identificar un modelo AM(2) por

medio de su función de autocorrelación simple al igual que identificar el modelo AR(2) mediante su función de autocorrelación parcial.

Gujarati y Poter (2010), indican que el coeficiente de autocorrelación de medias móviles se puede generalizar para modelos de orden superior  $q$  para un determinado rezago  $k$  dada por la siguiente ecuación:

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2} & \text{para } k = 1, \dots, q \\ 0 & k > 0 \end{cases} \quad (5.17)$$

**ANEXO 6**  
**PARÁMETROS DE LOS MODELOS AUTORREGRESIVOS Y DE MEDIAS**  
**MÓVILES. ARMA (p,q)**

**i Modelos mixtos autorregresivos y medias móviles ARMA (p, q)**

Pindyck y Rubinfeld (2001) indican que muchos procesos aleatorios estacionarios no pueden modelarse como medias móviles puros o como autorregresivos puros, dado que tienen las características de ambos tipos de procesos estocásticos, por tanto estos procesos se pueden modelar a través del modelo denominado como modelo autorregresivo y media móvil de orden (p,q) que también se les conoce con el nombre modelo ARMA(p,q). Los modelos ARMA(p,q) se representa mediante la siguiente ecuación:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \delta + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (6.1)$$

Si el proceso es estacionario, es decir su media es constante a lo largo del tiempo, está dado por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \mu &= E[y_t] = E[\phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \delta + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}] \\ &= E[\phi_1 y_{t-1}] + \dots + E[\phi_p y_{t-p}] + [\delta] + [E[\varepsilon_t]] + E[-\theta_1 \varepsilon_{t-1}] - \dots + E[-\theta_q \varepsilon_{t-q}] \\ &= \phi_1 \mu + \dots + \phi_p \mu + \delta + 0 \\ \mu &= \frac{\delta}{1 - \phi_1 - \dots - \phi_p} \end{aligned} \quad (6.2)$$

La condición para la estacionaridad es:

$$\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p < 1 \quad (6.3)$$

**i.1 Modelos ARMA (1,1)**

Este tipo de modelos están representados por la siguiente ecuación:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \delta + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad (6.4)$$

La media de este modelo se obtiene de la ecuación (6.2):

$$\mu = \frac{\delta}{1 - \phi_1} \quad (6.5)$$

La condición de estacionaridad es  $\phi_1 < 1$

La varianza y covarianza de este modelo se determina estableciendo  $\delta = 0$  que equivale a medir  $y_t$  en función de las desviaciones alrededor de su media, dado por la ecuación siguiente:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= E[(y_t)(\phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1})] = E[(\phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1})^2] \\ &= E[\phi_1^2 y_{t-1}^2 - 2\phi_1 \theta_1 y_{t-1} \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t^2 - 2\theta_1 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_t + 2\phi_1 y_{t-1} \varepsilon_t + \theta_1^2 \varepsilon_{t-1}^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E[\phi_1^2 Y_{t-1}^2] + E[-2\phi_1 \theta_1 Y_{t-1} \varepsilon_t] + E[\varepsilon_t^2] + E[-2\theta_1 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_t] + E[2\phi_1 y_{t-1} \varepsilon_t] + \\
&E[\theta_1^2 \varepsilon_{t-1}^2] \\
&= \phi_1^2 E[Y_{t-1}^2] - 2\phi_1 \theta_1 E[Y_{t-1} \varepsilon_t] + E[\varepsilon_t^2] - 2\theta_1 E[\varepsilon_{t-1} \varepsilon_t] + 2\phi_1 E[y_{t-1} \varepsilon_t] + \\
&\theta_1^2 E[\varepsilon_{t-1}^2] \\
&= \phi_1^2 \gamma_0 - \phi_1 \theta_1 \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2 - 0 + 0 + \theta_1^2 \sigma_\varepsilon^2 \\
\gamma_0 &= \frac{(1-2\phi_1 \theta_1 + \theta_1^2) \sigma_\varepsilon^2}{1-\phi_1^2} \tag{6.6}
\end{aligned}$$

Las covariancias  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ , se determinan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= E[(Y_{t-1})(\phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1})] = E[\phi_1 Y_{t-1}^2 + Y_{t-1} \varepsilon_t - Y_{t-1} \theta_1 \varepsilon_{t-1}] \\
&= E[\phi_1 Y_{t-1}^2] + E[Y_{t-1} \varepsilon_t] - E[Y_{t-1} \theta_1 \varepsilon_{t-1}] = \phi_1 \gamma_0 + 0 - \theta_1 \sigma_\varepsilon^2 \\
&= \phi_1 \left[ \frac{(1-2\phi_1 \theta_1 + \theta_1^2) \sigma_\varepsilon^2}{1-\phi_1^2} \right] - \theta_1 \sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\varepsilon^2 \left[ \phi_1 \frac{(1-2\phi_1 \theta_1 + \theta_1^2)}{1-\phi_1^2} - \theta_1 \right] \\
&= \sigma_\varepsilon^2 \left[ \phi_1 \frac{(1-2\phi_1 \theta_1 + \theta_1^2) - \theta_1 (1-\phi_1^2)}{1-\phi_1^2} \right] = \sigma_\varepsilon^2 \left[ \frac{(\phi_1 - 2\phi_1^2 \theta_1 + \phi_1 \theta_1^2) - \theta_1 (1-\phi_1^2)}{1-\phi_1^2} \right] \\
&= \sigma_\varepsilon^2 \left[ \frac{(\phi_1 - 2\phi_1^2 \theta_1 + \phi_1 \theta_1^2) - \theta_1 + \theta_1 \phi_1^2}{1-\phi_1^2} \right] = \left[ \frac{(\phi_1 - \phi_1^2 \theta_1 + \phi_1 \theta_1^2) - \theta_1}{1-\phi_1^2} \right] \sigma_\varepsilon^2 \\
&= \left[ \frac{\phi_1(1-\phi_1 \theta_1) + (\theta_1)(\theta_1 \phi_1 - 1)}{1-\phi_1^2} \right] \sigma_\varepsilon^2 = \left[ \frac{\phi_1(1-\phi_1 \theta_1) - (\theta_1)(1-\theta_1 \phi_1)}{1-\phi_1^2} \right] \sigma_\varepsilon^2 \\
\gamma_1 &= \left[ \frac{(1-\phi_1 \theta_1)[\phi_1 - \theta_1]}{1-\phi_1^2} \right] \sigma_\varepsilon^2 \tag{6.7}
\end{aligned}$$

$$\gamma_2 = E[(Y_{t-2})(\phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1})] = \phi_1 \gamma_1 \tag{6.8}$$

En general para el rezago k se tiene:

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} \quad \text{para } k \geq 2 \tag{6.9}$$

Por consiguiente la función de autocorrelación simple está dado por:

$$\rho_1 = \frac{\left[ \frac{(1-\phi_1 \theta_1)[\phi_1 - \theta_1]}{1-\phi_1^2} \right] \sigma_\varepsilon^2}{\frac{(1-2\phi_1 \theta_1 + \theta_1^2) \sigma_\varepsilon^2}{1-\phi_1^2}} = \frac{(1-\phi_1 \theta_1)[\phi_1 - \theta_1]}{1-2\phi_1 \theta_1 + \theta_1^2} \tag{6.10}$$

Para un desplazamiento  $k > 1$  se tiene:

$$\rho_k = \frac{\phi_1 \gamma_{k-1}}{\gamma_0} = \phi_1 \rho_{k-1} \quad \text{para } k \geq 2 \tag{6.11}$$

Pindyck y Rubinfeld (2001), indican que para procesos de orden superior, es decir el proceso general ARMA(p,q) la varianza, autocovarianza y la función de autocorrelación son soluciones a ecuaciones de diferencia por lo general no pueden resolverse por inspección, sin embargo puede mostrarse las ecuaciones para estos parámetros son:

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} \quad k \geq q + 1 \tag{6.12}$$

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \quad k \geq q + 1 \tag{6.13}$$



## ANEXO 7

### OPERADORES DE RETARDO

El operador polinomial de retardos se expresa mediante la ecuación (7.1):

$$LY_t = Y_{t-1} \quad (7.1)$$

Aplicando dos veces el operador a la ecuación (7.1) se obtiene:

$$L(LY_{t-1}) = L^2Y_t = Y_{t-2} \quad (7.2)$$

Generalizando para k retardos se tiene:

$$L^kY_t = Y_{t-k} \quad (7.3)$$

#### 1. El operador de retardos en procesos autorregresivos AR(p)

El procesos autorregresivos AR(p) está dada por la ecuación (12):

$$y_t = \phi_1y_{t-1} + \phi_2y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \delta + \varepsilon_t \quad (7.4)$$

Aplicando el operador de retardos L a la ecuación (7.4), se tiene:

$$y_t = \delta + \phi_1Ly_t + \phi_2L^2y_t + \dots + \phi_pL^p y_t + \varepsilon_t \quad (7.5)$$

$$(1 - \phi_1L - \phi_2L^2 \dots - \phi_pL^p)y_t = \delta + \varepsilon_t \quad (7.6)$$

El operador de retardos L, se puede representar mediante la ecuación (7.7)

$$\Psi(L) \equiv 1 - \phi_1L + \phi_2L^2 + \dots + \phi_pL^p \quad (7.7)$$

En forma compacta la ecuación (7.6) se puede expresar como:

$$\Psi(L)Y_t = \phi_p(L)Y_t = \delta + \varepsilon_t \quad (7.8)$$

Si en la ecuación (7.6) se considera  $\delta = 0$ , entonces se tiene:

$$(1 - \phi_1L - \phi_2L^2 - \dots - \phi_pL^p)y_t = \Psi(L)Y_t = \phi_p(L)Y_t = \varepsilon_t \quad (7.9)$$

La ecuación (7.9) se considera como una ecuación en diferencias finitas en la variable  $Y_t$ . Como la variable  $\varepsilon_t$  es ruido blanco no influye sobre la existencia de una tendencia en la variable  $Y_t$ , el comportamiento temporal de  $Y_t$ , estará determinado por el polinomio autorregresivo (primer miembro de la ecuación 7.9). Si la ecuación (7.9) representa un proceso estacionario, la parte izquierda de esta ecuación debe ser homogénea, es decir se debe cumplir:

$$(1 - \phi_1L - \phi_2L^2 - \dots - \phi_pL^p)y_t = \Psi(L)Y_t = \phi_p(L)Y_t = 0 \quad (7.10)$$

La ecuación (7.10) es ecuación característica. Las raíces del polinomio dado por la ecuación (7.10) en módulo deben ser mayor que 1, y por lo tanto deben caer fuera del círculo de la unidad.

### 1.1 El operador de retardos en procesos autorregresivos de orden 1 AR(1)

El proceso AR (1) se describe mediante la ecuación (7.11) que se obtiene a partir de la ecuación (7.10):

$$(1 - \phi_1 L)y_t = 0 \quad (7.11)$$

La ecuación característica de una ecuación en diferencias de primer orden es:

$$(1 - \phi_1 L) = 0 \quad (7.12)$$

Resolviendo (7.12) se obtiene:

$$L = \frac{1}{\phi_1} \quad (7.13)$$

La condición de estacionaridad es cuando la raíz del operador, es decir el valor de L en valor absoluto sea mayor a 1.

### 1.2 El operador de retardos en procesos autorregresivos de orden 2 AR(2)

El proceso AR(2) se describe mediante la ecuación (7.14) que se obtiene a partir de la ecuación (7.9).

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)y_t = \varepsilon_t \quad (7.14)$$

La ecuación homogénea en  $Y_t$  es:

$$y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} = 0 \quad (7.15)$$

La ecuación (7.15) se soluciona sustituyendo:

$$y_t = r^t \quad (7.16)$$

$$r^2 - \phi_1 r - \phi_2 = 0 \quad (7.17)$$

El polinomio autorregresivo ( con el operador de retardo L) se obtiene de (7.14):

$$\Psi(L) \equiv 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 = 0 \quad (7.18)$$

Entonces la ecuación (7.18) tiene 2 raíces, dada por la ecuación (7.19):

$$L_1, L_2 = \frac{\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 - 4\phi_2}}{-2\phi_2} \quad (7.19)$$

El modelo AR(2) es estacionario si:

$$|L_1| = \left| \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 - 4\phi_2}}{-2\phi_2} \right| > 1 \text{ y } |L_2| = \left| \frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 - 4\phi_2}}{-2\phi_2} \right| > \quad (7.20)$$

Sí el radicando  $\sqrt{\phi_1^2 - 4\phi_2} > 0$ , las raíces son reales

Sí el radicando  $\sqrt{\phi_1^2 - 4\phi_2} < 0$ , las raíces son complejas

### 1.3 El operador de retardos en procesos autorregresivos de orden p AR(P)

Para el caso general de procesos autorregresivos la ecuación característica se plantea como:

$$r^p - \phi_1 r^{p-1} - \phi_2 r^{p-2} - \dots - \phi_p = 0 \quad (7.21)$$

El polinomio autorregresivo es:

$$\Psi(L) \equiv 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p = 0 \quad (7.22)$$

La ecuación (7.20) tiene p raíces complejas en general.

## 2. Operador de retardos en procesos de media móvil MA(q)

Los modelos de medias móviles están dadas por la ecuación (26).

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (7.21)$$

Considerando  $\mu = \theta_0$ , se tiene:

$$Y_t = \theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (7.22)$$

Expresando la ecuación en términos del operador de retardo L, se tiene:

$$Y_t = (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q) \varepsilon_t \quad (7.23)$$

$$Y_t = \theta_q(L) \varepsilon_t \quad (7.24)$$

Los procesos MA(q) son siempre estacionarios, por ser la suma de procesos estacionarios, se dice que el proceso es invertible si las raíces del operador :  $\theta_q(L) = 0$ , son módulos mayores que la unidad.

### 2.1 El operador de retardos en procesos de media móvil de orden 1 MA(1)

De la ecuación (7.23) se tiene:

$$(1 - \theta_1 L) = 0 \quad (7.25)$$

La raíz de la ecuación (7.25) es:

$$L = \frac{1}{\theta_1} \quad (7.26)$$

La invertibilidad sucede si  $|L| = \frac{1}{|\theta_1|} > 1$ , entonces  $|\theta_1| < 1$ .

### 2.2 El operador de retardos en procesos de media móvil de orden 1 MA(2)

De la ecuación (7.23) se tiene:

$$(1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2) = 0 \quad (7.27)$$

Las raíces de la ecuación (7.27) son:

$$L_1, L_2 = \frac{\theta_1 \mp \sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_2}}{-2\theta_2} \quad (7.28)$$

La condición de invertibilidad sucede si:

$$|L_1| = \left| \frac{\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_2}}{-2\theta_2} \right| > 1, |L_2| = \left| \frac{\theta_1 - \sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_2}}{-2\theta_2} \right| > 1 \quad (7.28)$$

### 3. Operador de retardos en procesos autorregresivos y media móvil ARMA(p,q)

El proceso ARMA(p,q) se describe mediante la ecuación (7.29) que se obtiene a partir de la ecuación (33).

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \delta + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (7.29)$$

Para un proceso ARMA (p,q) una condición de estacionariedad es la misma que para un proceso AR(p), del mismo modo una condición de invertibilidad es la misma que para el proceso MA(q).

El modelo ARMA (p,q) se puede escribir en términos del operador de retardos como:

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) Y_t = (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q) \varepsilon_t \quad (7.30)$$

$$\phi_p(L) Y_t = \theta_q(L) \varepsilon_t \quad (7.31)$$

Donde:

$\phi_p(L)$  = polinomio autorregresivo

$\theta_q(L)$  = polinomio de medias móviles

El proceso ARMA(p,q) es estacionario si:

$$Y_t = \frac{\theta_q(L)}{\phi_p(L)} \varepsilon_t \quad (7.32)$$

El proceso ARMA(p,q) es estacionario si:

$$\varepsilon_t = \frac{\phi_p(L)}{\theta_q(L)} Y_t \quad (7.33)$$

**ANEXO 8**  
**COMPARACIÓN GRAFICA DE LAS SERIES ANUALES HISTÓRICAS Y**  
**GENERADAS CON EL MODELO AR(1) EN LOS AFLUENTES DEL RÍO SANTA**

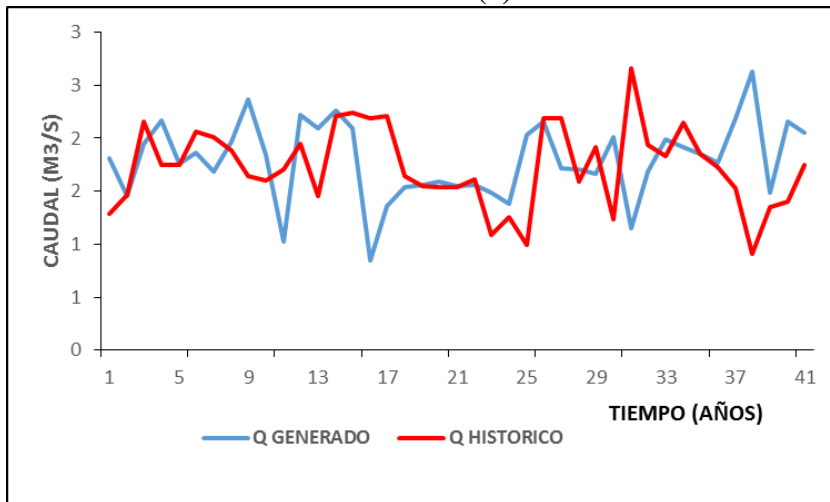


Figura 8.1: Descargas medias anuales históricas y generadas con el modelo ARMA (1,0) de la estación Querococha

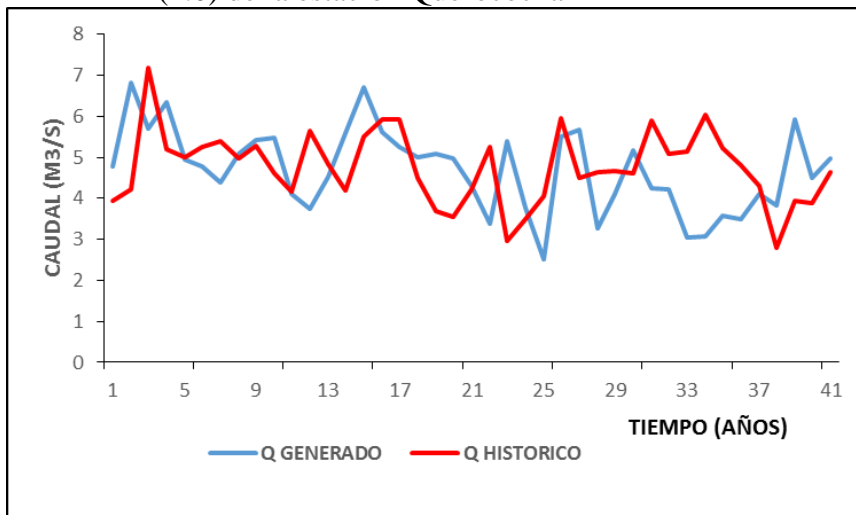


Figura 8.2: Descargas medias anuales históricas y generadas con el modelo ARMA (1,0) de la estación Olleros

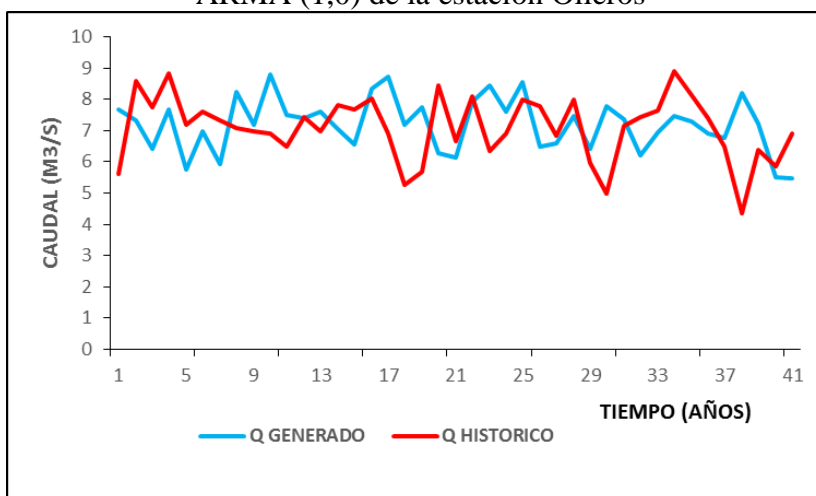


Figura 8.3: Descargas medias anuales históricas y generadas con el modelo ARMA (1,0) de la estación Quillcay

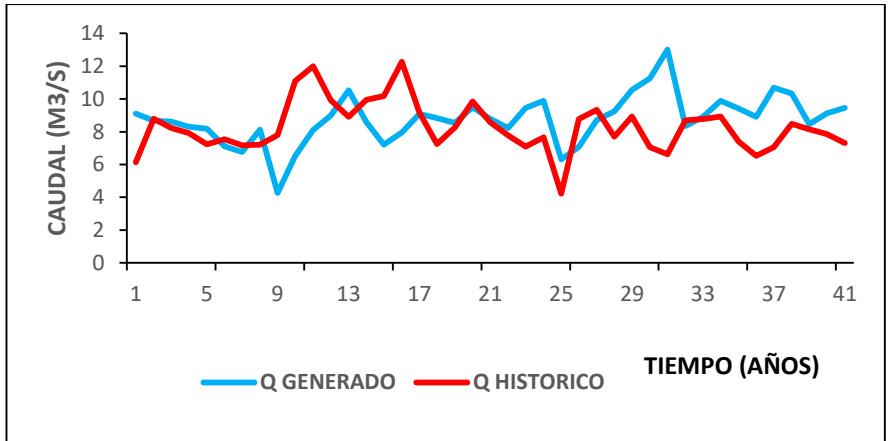


Figura 8.4: Descargas medias anuales históricas y generadas con el modelo ARMA (1,0) de la estación Chancos

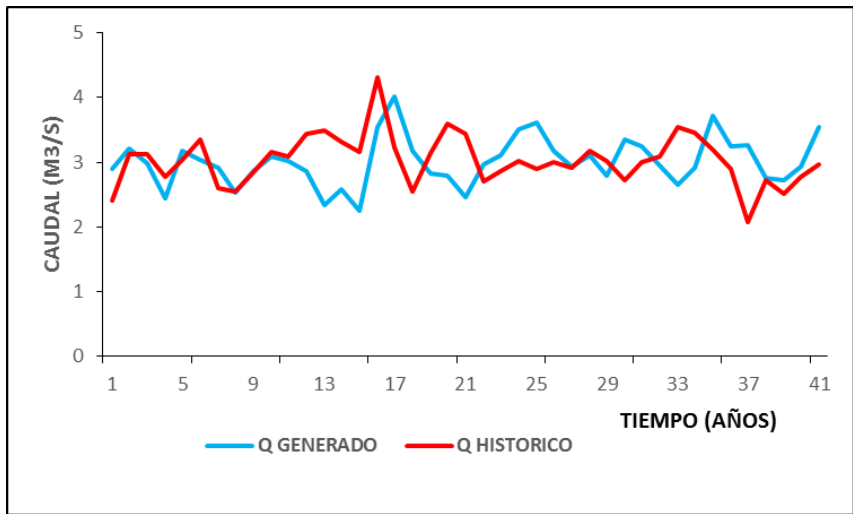


Figura 8.5: Descargas medias anuales históricas y generadas con el modelo ARMA (1,0) de la estación Llanganuco

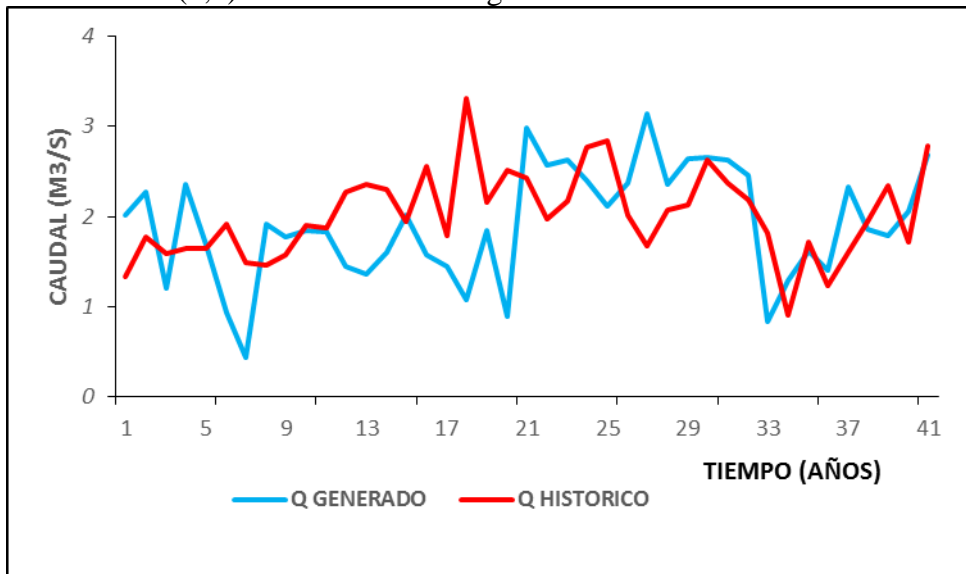


Figura 8.6: Descargas medias anuales históricas y generadas con el modelo ARMA (1,0) de la estación Parón

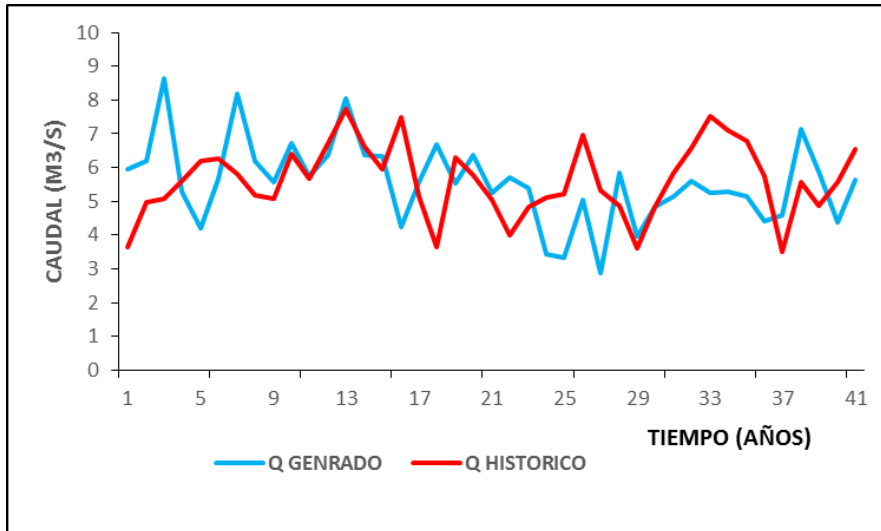


Figura 8.7: Descargas medias anuales históricas y generadas con el modelo ARMA (1,0) de la estación Colcas

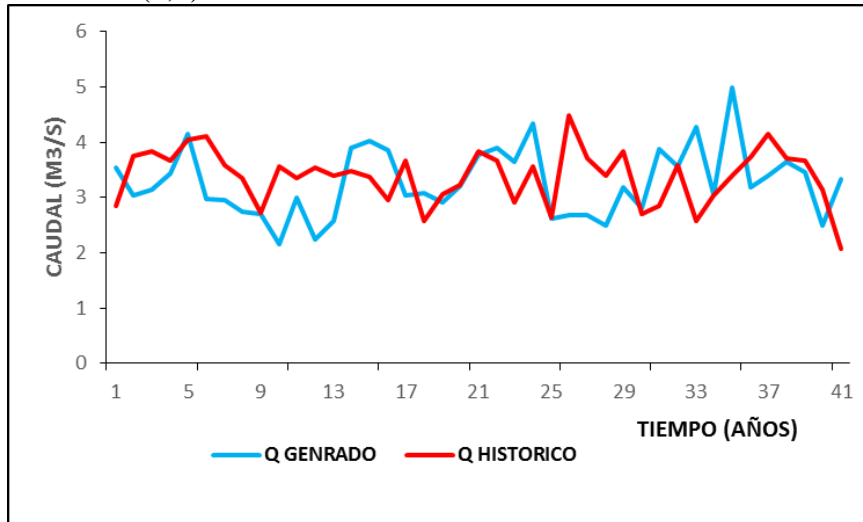


Figura 8.8: Descargas medias anuales históricas y generadas con el modelo ARMA (1.0) de la estación Los Cedros

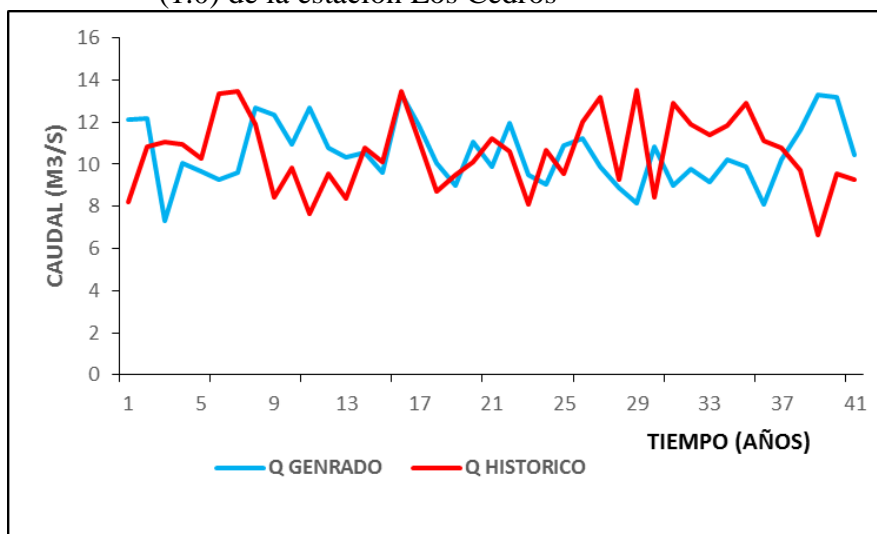


Figura 8.9: Descargas medias anuales históricas y generadas con el modelo ARMA (1.0) de la estación Quitaraca

**ANEXO 9**  
**VALIDACIÓN O SELECCIÓN DEL MODELO ESTOCÁSTICO ADECUADO**  
**PARA LOS CAUDALES MEDIOS MENSUALES DE LA CUENCA DEL RÍO**  
**SANTA**

ESTACION : QUEROCOCHA				
N°	MES	MODELO	SIC	¿MODELO ADECUADO?
1	ENERO	PARMA (1,0)	-4.592	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	-1.155	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	-2.360	NO ADECUADO
2	FEBRERO	PARMA (1,0)	77.550	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	81.207	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	84.881	NO ADECUADO
3	MARZO	PARMA (1,0)	47.923	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	51.594	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	54.218	NO ADECUADO
4	ABRIL	PARMA (1,0)	-2.218	NO ADECUADO
		PARMA (2,0)	1.464	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	-2.912	SÍ ES ADECUADO
5	MAYO	PARMA (1,0)	-37.422	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	-33.808	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	-30.508	NO ADECUADO
6	JUNIO	PARMA (1,0)	-145.044	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	-142.453	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	-140.772	NO ADECUADO
7	JULIO	PARMA (1,0)	-192.349	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	-191.691	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	-188.670	NO ADECUADO
8	AGOSTO	PARMA (1,0)	-171.349	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	-168.211	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	-164.506	NO ADECUADO
9	SEPTIEMBRE	PARMA (1,0)	-108.835	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	-106.827	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	-105.245	NO ADECUADO
10	OCTUBRE	PARMA (1,0)	-51.019	NO ADECUADO
		PARMA (2,0)	-52.952	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (3,0)	-52.654	NO ADECUADO
11	NOVIEMBRE	PARMA (1,0)	-8.858	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	-5.341	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	-4.078	NO ADECUADO
12	DICIEMBRE	PARMA (1,0)	5.379	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	6.984	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	6.247	NO ADECUADO



ESTACION : OLLEROS				
N°	MES	MODELO	SIC	¿MODELO ADECUADO?
1	ENERO	PARMA (1,0)	87.595	NO ADECUADO
		PARMA (2,0)	85.765	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (3,0)	89.340	NO ADECUADO
2	FEBRERO	PARMA (1,0)	123.645	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	126.272	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	129.947	NO ADECUADO
3	MARZO	PARMA (1,0)	110.998	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	114.695	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	117.976	NO ADECUADO
4	ABRIL	PARMA (1,0)	86.896	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	89.770	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	91.553	NO ADECUADO
5	MAYO	PARMA (1,0)	41.132	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	44.687	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	48.400	NO ADECUADO
6	JUNIO	PARMA (1,0)	-49.122	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	-47.022	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	-43.648	NO ADECUADO
7	JULIO	PARMA (1,0)	-55.408	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	-52.175	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	-49.920	NO ADECUADO
8	AGOSTO	PARMA (1,0)	-73.673	NO ADECUADO
		PARMA (2,0)	-74.686	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (3,0)	-72.439	NO ADECUADO
9	SEPTIEMBRE	PARMA (1,0)	-2.983	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	-0.081	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	3.627	NO ADECUADO
10	OCTUBRE	PARMA (1,0)	34.698	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	37.124	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	38.705	NO ADECUADO
11	NOVIEMBRE	PARMA (1,0)	53.656	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	57.042	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	59.970	NO ADECUADO
12	DICIEMBRE	PARMA (1,0)	61.913	NO ADECUADO
		PARMA (2,0)	59.996	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (3,0)	63.652	NO ADECUADO

ESTACION :		QUILLCAY		
N°	MES	PARMA (1,0)	SIC	¿MODELO ADECUADO?
1	ENERO	PARMA (1,0)	117.255	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	119.425	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	121.644	NO ADECUADO
2	FEBRERO	PARMA (1,0)	116.940	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	120.441	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	123.462	NO ADECUADO
3	MARZO	PARMA (1,0)	123.098	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	126.737	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	129.424	NO ADECUADO
4	ABRIL	PARMA (1,0)	113.342	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	113.424	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	115.980	NO ADECUADO
5	MAYO	PARMA (1,0)	46.815	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	50.435	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	54.129	NO ADECUADO
6	JUNIO	PARMA (1,0)	16.051	NO ADECUADO
		PARMA (2,0)	14.187	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (3,0)	17.897	NO ADECUADO
7	JULIO	PARMA (1,0)	-11.727	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	-8.301	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	-9.301	NO ADECUADO
8	AGOSTO	PARMA (1,0)	4.649	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	7.861	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	9.288	NO ADECUADO
9	SEPTIEMBRE	PARMA (1,0)	18.154	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	20.237	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	20.232	NO ADECUADO
10	OCTUBRE	PARMA (1,0)	30.772	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	32.021	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	32.844	NO ADECUADO
11	NOVIEMBRE	PARMA (1,0)	68.888	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	72.178	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	74.404	NO ADECUADO
12	DICIEMBRE	PARMA (1,0)	114.972	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	118.605	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	122.245	NO ADECUADO

ESTACION : CHANCOS				
N°	MES	MODELO	SIC	¿MODELO ADECUADO?
1	ENERO	PARMA (1,0)	95.833	NO ADECUADO
		PARMA (2,0)	95.502	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (3,0)	99.181	NO ADECUADO
2	FEBRERO	PARMA (1,0)	124.860	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	128.412	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	126.451	NO ADECUADO
3	MARZO	PARMA (1,0)	147.375	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	150.906	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	154.412	NO ADECUADO
4	ABRIL	PARMA (1,0)	139.025	NO ADECUADO
		PARMA (2,0)	135.850	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (3,0)	138.655	NO ADECUADO
5	MAYO	PARMA (1,0)	83.836	NO ADECUADO
		PARMA (2,0)	82.198	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (3,0)	84.983	NO ADECUADO
6	JUNIO	PARMA (1,0)	57.854	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	61.102	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	62.647	NO ADECUADO
7	JULIO	PARMA (1,0)	4.778	NO ADECUADO
		PARMA (2,0)	1.048	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (3,0)	4.743	NO ADECUADO
8	AGOSTO	PARMA (1,0)	-49.577	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	-47.700	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	-44.384	NO ADECUADO
9	SEPTIEMBRE	PARMA (1,0)	37.188	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	39.673	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	43.373	NO ADECUADO
10	OCTUBRE	PARMA (1,0)	82.324	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	85.592	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	86.876	NO ADECUADO
11	NOVIEMBRE	PARMA (1,0)	98.243	NO ADECUADO
		PARMA (2,0)	94.809	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (3,0)	96.817	NO ADECUADO
12	DICIEMBRE	PARMA (1,0)	118.535	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	122.194	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	124.302	NO ADECUADO

ESTACION : LLANGANUCO				
N°	MES	MODELO	SIC	¿MODELO ADECUADO?
1	ENERO	PARMA (1,0)	-1.686	NO ADECUADO
		PARMA (2,0)	-2.853	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (3,0)	-0.483	NO ADECUADO
2	FEBRERO	PARMA (1,0)	9.011	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	9.599	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	11.593	NO ADECUADO
3	MARZO	PARMA (1,0)	10.578	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	14.196	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	16.915	NO ADECUADO
4	ABRIL	PARMA (1,0)	9.346	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	12.759	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	9.611	NO ADECUADO
5	MAYO	PARMA (1,0)	-42.077	NO ADECUADO
		PARMA (2,0)	-39.877	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	-46.433	SÍ ES ADECUADO
6	JUNIO	PARMA (1,0)	-54.100	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	-51.717	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	-48.019	NO ADECUADO
7	JULIO	PARMA (1,0)	-27.667	NO ADECUADO
		PARMA (2,0)	-34.030	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (3,0)	-33.979	NO ADECUADO
8	AGOSTO	PARMA (1,0)	-80.640	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	-78.326	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	-75.041	NO ADECUADO
9	SEPTIEMBRE	PARMA (1,0)	-53.344	NO ADECUADO
		PARMA (2,0)	-49.656	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	-63.982	SÍ ES ADECUADO
10	OCTUBRE	PARMA (1,0)	-61.720	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	-59.908	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	-56.253	NO ADECUADO
11	NOVIEMBRE	PARMA (1,0)	-54.408	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	-51.623	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	-48.180	NO ADECUADO
12	DICIEMBRE	PARMA (1,0)	-12.005	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	-10.925	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	-7.301	NO ADECUADO

ESTACION : PARON				
N°	MES	MODELO	SIC	¿MODELO ADECUADO?
1	ENERO	PARMA (1,0)	-10.124	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	-8.297	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	-4.780	NO ADECUADO
2	FEBRERO	PARMA (1,0)	30.917	NO ADECUADO
		PARMA (2,0)	34.520	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	26.600	SÍ ES ADECUADO
3	MARZO	PARMA (1,0)	47.339	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	49.681	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	48.328	NO ADECUADO
4	ABRIL	PARMA (1,0)	0.953	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	4.666	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	5.868	NO ADECUADO
5	MAYO	PARMA (1,0)	-42.649	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	-39.672	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	-36.976	NO ADECUADO
6	JUNIO	PARMA (1,0)	-17.259	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	-14.044	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	-16.530	NO ADECUADO
7	JULIO	PARMA (1,0)	33.531	NO ADECUADO
		PARMA (2,0)	36.775	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	25.658	SÍ ES ADECUADO
8	AGOSTO	PARMA (1,0)	40.186	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	41.058	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	42.068	NO ADECUADO
9	SEPTIEMBRE	PARMA (1,0)	2.731	NO ADECUADO
		PARMA (2,0)	4.209	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	-1.302	SÍ ES ADECUADO
10	OCTUBRE	PARMA (1,0)	-53.794	NO ADECUADO
		PARMA (2,0)	-56.489	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (3,0)	-54.379	NO ADECUADO
11	NOVIEMBRE	PARMA (1,0)	-50.624	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	-49.307	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	-45.687	NO ADECUADO
12	DICIEMBRE	PARMA (1,0)	0.020	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	1.507	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	1.941	NO ADECUADO

ESTACION : COLCAS				
N°	MES	MODELO	SIC	¿MODELO ADECUADO?
1	ENERO	PARMA (1,0)	104.491	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	106.803	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	109.870	NO ADECUADO
2	FEBRERO	PARMA (1,0)	110.992	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	114.505	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	113.938	NO ADECUADO
3	MARZO	PARMA (1,0)	130.141	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	131.106	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	133.119	NO ADECUADO
4	ABRIL	PARMA (1,0)	98.256	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	101.381	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	100.099	NO ADECUADO
5	MAYO	PARMA (1,0)	34.868	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	38.011	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	40.791	NO ADECUADO
6	JUNIO	PARMA (1,0)	47.406	NO ADECUADO
		PARMA (2,0)	46.788	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (3,0)	50.323	NO ADECUADO
7	JULIO	PARMA (1,0)	24.808	NO ADECUADO
		PARMA (2,0)	27.524	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	24.525	SÍ ES ADECUADO
8	AGOSTO	PARMA (1,0)	31.895	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	32.762	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	35.566	NO ADECUADO
9	SEPTIEMBRE	PARMA (1,0)	37.143	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	38.963	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	38.145	NO ADECUADO
10	OCTUBRE	PARMA (1,0)	19.257	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	21.634	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	25.287	NO ADECUADO
11	NOVIEMBRE	PARMA (1,0)	43.591	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	46.746	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	50.018	NO ADECUADO
12	DICIEMBRE	PARMA (1,0)	70.282	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	70.939	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	73.192	NO ADECUADO

ESTACION : LOS CEDROS				
N°	MES	MODELO	SIC	¿MODELO ADECUADO?
1	ENERO	PARMA (1,0)	38.515	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	41.784	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	40.489	NO ADECUADO
2	FEBRERO	PARMA (1,0)	46.201	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	48.901	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	52.549	NO ADECUADO
3	MARZO	PARMA (1,0)	66.857	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	69.518	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	72.120	NO ADECUADO
4	ABRIL	PARMA (1,0)	42.367	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	45.324	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	48.842	NO ADECUADO
5	MAYO	PARMA (1,0)	-27.052	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	-24.284	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	-22.008	NO ADECUADO
6	JUNIO	PARMA (1,0)	-49.559	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	-46.040	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	-42.405	NO ADECUADO
7	JULIO	PARMA (1,0)	-57.845	NO ADECUADO
		PARMA (2,0)	-60.172	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (3,0)	-56.487	NO ADECUADO
8	AGOSTO	PARMA (1,0)	-5.746	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	-2.552	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	-0.919	NO ADECUADO
9	SEPTIEMBRE	PARMA (1,0)	-34.383	NO ADECUADO
		PARMA (2,0)	-32.201	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	-35.263	SÍ ES ADECUADO
10	OCTUBRE	PARMA (1,0)	-10.142	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	-6.617	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	-9.028	NO ADECUADO
11	NOVIEMBRE	PARMA (1,0)	-19.536	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	-16.353	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	-12.807	NO ADECUADO
12	DICIEMBRE	PARMA (1,0)	35.967	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	39.655	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	35.989	NO ADECUADO

ESTACION : QUITARACSA				
N°	MES	MODELO	SIC	¿MODELO ADECUADO?
1	ENERO	PARMA (1,0)	149.938	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	152.379	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	153.162	NO ADECUADO
2	FEBRERO	PARMA (1,0)	176.248	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	179.399	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	176.771	NO ADECUADO
3	MARZO	PARMA (1,0)	173.175	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	176.884	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	180.521	NO ADECUADO
4	ABRIL	PARMA (1,0)	152.334	NO ADECUADO
		PARMA (2,0)	155.203	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	148.401	SÍ ES ADECUADO
5	MAYO	PARMA (1,0)	78.970	NO ADECUADO
		PARMA (2,0)	78.579	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (3,0)	81.590	NO ADECUADO
6	JUNIO	PARMA (1,0)	32.630	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	34.917	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	38.379	NO ADECUADO
7	JULIO	PARMA (1,0)	22.757	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	26.357	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	30.054	NO ADECUADO
8	AGOSTO	PARMA (1,0)	14.758	NO ADECUADO
		PARMA (2,0)	4.343	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (3,0)	6.899	NO ADECUADO
9	SEPTIEMBRE	PARMA (1,0)	11.098	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	14.564	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	18.164	NO ADECUADO
10	OCTUBRE	PARMA (1,0)	77.431	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	81.123	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	83.118	NO ADECUADO
11	NOVIEMBRE	PARMA (1,0)	77.513	NO ADECUADO
		PARMA (2,0)	76.468	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (3,0)	80.181	NO ADECUADO
12	DICIEMBRE	PARMA (1,0)	136.408	SÍ ES ADECUADO
		PARMA (2,0)	138.961	NO ADECUADO
		PARMA (3,0)	142.217	NO ADECUADO



## ANEXO 10

### 10.1 Contraste de Dickey-Fuller

Wooldrige (2010) indica; que el método más simple de probar si existe raíz unitaria empieza con el modelo AR(1), dada por la ecuación 10.1.

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + e_t \quad e_t \sim RBN(0, \sigma^2) \quad (10.1)$$

El modelo de la ecuación (10.1) es estacionario sí  $|\phi| < 1$ . Cuando  $\phi = 1$  el proceso  $Y_t$  no es estacionario porque tiene raíz unitaria.

La hipótesis nula si  $Y_t$  tiene raíz unitaria es:

$$H_0: \phi = 1 \quad (10.2)$$

En casi todos los casos se tienen interés en la hipótesis alternante de una sola cola:

$$H_1: \phi < 1 \quad (10.3)$$

Cuando  $|\phi| < 1$ ,  $Y_t$  es un proceso estacionario o estable AR(1), lo cual indica que es débilmente dependiente o que no se correlaciona asintóticamente.

La ecuación conveniente de la prueba de raíz unitaria es restar  $Y_{t-1}$  a ambos lados del modelo (10.1) se puede escribir por medio de la ecuación (10.5):

$$Y_t - Y_{t-1} = \phi Y_{t-1} - Y_{t-1} + e_t \quad (10.4)$$

$$\Delta Y_t = (\phi - 1)Y_{t-1} + e_t = \beta Y_{t-1} + e_t \quad (10.5)$$

Acerca de la ecuación (10.5) Wooldrige (2010), indica, que este modelo (10.5) es un modelo dinámicamente complejo y parece sencillo para probar  $H_0: \beta = 0$ , contra  $H_1: \beta < 0$

$$\begin{aligned} H_0: \beta &= 0 \\ H_a: \beta &< 0 \end{aligned} \quad (10.6)$$

El problema es que la ecuación (10.6) con la  $H_0$   $Y_{t-1}$  es un proceso de caminata aleatoria y por lo tanto el teorema de límite central en la que se basa la distribución normal estándar asintótica para el estadístico t no aplica; el estadístico t no tiene una distribución normal estándar aproximada inclusive en grandes tamaños de muestras. La distribución asintótica del estadístico de t bajo  $H_0$  se conoce como distribución de Dickey-Fuller.

El mismo autor indica que aunque no se pueden usar los valores críticos, es posible utilizar el estadístico t para estimar  $\hat{\beta}$  de la ecuación (10.5).

Gonzales (2009) indica, que la hipótesis alternativa de estacionariedad se plantea únicamente en términos de  $\beta$  negativo, porque un valor positivo de  $\beta$  supondría un modelo no estacionario de comportamiento explosivo.

En la ecuación (10.5) la hipótesis nula es  $\beta = 0$ , es decir se tiene un paseo aleatorio, y si  $\beta \neq 0$ , es un proceso estacionario. La hipótesis nula  $\beta = 0$  indica que el proceso es no estacionario donde  $\rho = 1$ .

Peña (2010) indica, que ecuación (10.5) es un modelo de regresión y el estadístico habitual para realizar este tipo de prueba es:

$$t_{\mu} = \frac{\hat{\beta}}{S_{\hat{\beta}}} \quad (10.8)$$

Donde:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=2}^T Y_{t-1} \Delta Y_t}{\sum_{t=2}^T Y_{t-1}^2} \quad (10.9)$$

$$S_{\hat{\beta}} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{t=2}^T Y_{t-1}^2}} \quad (10.10)$$

Al estadístico  $t_{\mu}$  se compara con el estadístico t de Dickey-Fuller ( $t_c$ ). Este estadístico  $t_{\mu}$  no sigue la ley ninguna distribución conocida bajo la hipótesis nula de no estacionariedad por lo que Dickey- Fuller calcularon los percentiles de este estadístico bajo la  $H_0$  de  $\beta = 0$ , (implica  $\phi = \rho = 1$ ). La distribución de  $t_c$  ha sido tabulado por Dickey-Fuller con los niveles críticos correctos para el estadístico en función del tamaño muestral ( $T$ ) y el nivel de significación ( $\alpha$ ), (estos valores vienen tabulados en las bibliografías).

Peña (2010) indica, que:

$H_0: \beta = 0$  es un proceso no estacionario donde  $\rho = 1$ ,

$H_1: \beta \neq 0$ , indica que el proceso es estacionario

La decisión del contraste es:

Sí:  $t_{\mu} \leq t_c$  (para un nivel probabilístico de la prueba) se rechaza la hipótesis nula, es decir hay estacionariedad, por tanto la serie de tiempo es no estacionario o es inestable.

Sí:  $t_{\mu} > t_c$  (para un nivel probabilístico de la prueba) indica aceptar la hipótesis nula, es decir que no existe estacionariedad, por tanto la serie de tiempo es no es estacionario o es inestable. El valor de  $t_c$  se obtiene de la tablas.

**UNIVERSIDAD NACIONAL AGRARIA  
LA MOLINA  
ESCUELA DE POSGRADO  
DOCTORADO EN RECURSOS HÍDRICOS**



**“MODELACIÓN ESTOCÁSTICA DE LOS CAUDALES EN  
LA CUENCA DEL RIO SANTA”**

**Presentada por:**

**ABELARDO MANRIQUE DÍAZ SALAS**

**TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE *DOCTORIS PHILOSOPHIAE*  
EN RECURSOS HÍDRICOS**

**Lima - Perú**

**2017**

UNIVERSIDAD NACIONAL AGRARIA LA MOLINA

Escuela de Posgrado

Telf. 614-7800 Anexo 209 Telefax 614-7142

Apartado 12-056 La Molina

LIMA - PERU

## ACTA DE SUSTENTACIÓN

Los Miembros del Jurado que suscriben, reunidos para evaluar la sustentación de tesis presentada por el alumno **ABELARDO MANRIQUE DÍAZ SALAS**, denominada: "MODELACIÓN ESTOCÁSTICA DE LOS CAUDALES EN LA CUENCA DEL RÍO SANTA", para cumplir con uno de los requisitos para optar el grado académico de *Doctoris Philosophiae* (Ph.D.) en **RECURSOS HÍDRICOS**.

Teniendo en consideración los méritos del referido trabajo así como los conocimientos demostrados por el sustentante, declaramos la tesis como:

APROBADO

BUENA

Calificada como (\*)



En consecuencia, queda en condición de ser considerada APTO por el Consejo Universitario y recibir el grado académico de *Doctoris Philosophiae*, de conformidad con lo estipulado de acuerdo a la Resolución N°77-2005-UNALM.

La Molina, 21 de julio del 2016

Ph.D. Eusebio Ingo Blanco  
PRESIDENTE

Dr. Waldo Lavado Casimiro  
PATROCINADOR

Dr. Abel Mejía Marcauczco  
MIEMBRO

Dr. Néstor Montalvo Arquíñigo  
MIEMBRO

Ph.D. Manuel Paulet Iturri  
MIEMBRO EXTERNO

(\*) De acuerdo con el Artículo 39° del Reglamento de Tesis, éstas deberán ser calificadas con términos de: SOBRESALIENTE, MUY BUENA o BUENA.

**UNIVERSIDAD NACIONAL AGRARIA  
LA MOLINA**

**ESCUELA DE POSGRADO  
DOCTORADO EN RECURSOS HÍDRICOS**

**“MODELACIÓN ESTOCÁSTICA DE LOS CAUDALES EN  
LA CUENCA DEL RIO SANTA”**

**TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE**

*Doctoris Philosophiae (Ph. D.)*

**Presentada por:**

**ABELARDO MANRIQUE DÍAZ SALAS**

**Sustentada y aprobada ante el siguiente jurado:**

Ph. D. Eusebio Ingol Blanco  
**PRESIDENTE**

Ph. D. Waldo Lavado Casimiro  
**PATROCINADOR**

Dr. Jesús Abel Mejía Marcacuzco  
**MIEMBRO**

Dr. Néstor Montalvo Aquiñigo  
**MIEMBRO**

Ph. D. Manuel Paulet Iturri  
**MIEMBRO EXTERNO**