

UNIVERSIDAD NACIONAL AGRARIA

LA MOLINA

FACULTAD DE ECONOMÍA Y PLANIFICACIÓN



**“MODELACIÓN DE LA VOLATILIDAD DEL INDICE
GENERAL DE LA BOLSA DE VALORES DE LIMA,
PERIODO 2009 - 2011”**

**TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO DE
INGENIERO EN ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA**

Presentado por:

JORGE ENRIQUE CASTILLO GAMARRA

LIMA – PERÚ

2014

DEDICATORIA

A mis padres: Mery y Jorge, pilares esenciales en mi vida, por su ejemplo de esfuerzo y perseverancia, por su apoyo e incansable aliento para la realización de esta tesis así como en cada nuevo proyecto emprendido, a mi abuela Yolanda por sus consejos y confianza al comenzar mi carrera profesional que hoy se ven realizados.

AGRADECIMIENTO

En especial a mi patrocinador de tesis, Mg. SC. Rino Sotomayor Ruiz por la orientación y ayuda brindada para el desarrollo y término de esta proyecto.

A mi alma mater, Universidad Nacional Agraria La Molina y a los docentes del Departamento de Estadística e Informática quienes contribuyeron en mi formación como profesional y persona.

Y a todos aquellos que de una u otra manera me brindaron su apoyo y ayuda para la culminación de esta tesis.

INDICE GENERAL

I.	INTRODUCCIÓN.....	1
II.	REVISIÓN BIBLIOGRAFICA.....	4
2.1	Introducción.....	4
2.2	Procesos Estocásticos.....	5
2.3	Principales Características y Conceptos de las Series Temporales.....	8
2.4	Modelos Box y Jenkins.....	17
2.4.1	Modelos Puramente Aleatorios.....	18
2.4.2	Modelos Autoregresivos.....	18
2.4.3	Modelo De Promedio Móvil.....	19
2.4.4	Modelo Autoregresivos De Promedio Móvil.....	20
2.5	Modelos De Heterocedastisidad Condicional Autoregresiva.....	20
2.5.1	Modelo ARCH.....	21
2.5.2	Modelo GARCH.....	22
2.5.3	Modelo TGARCH.....	22
2.5.4	Modelo EGARCH.....	23
2.6	TEST ARCH-LM.....	24
2.7	Volatilidad.....	26
2.7.1	Definición.....	26
2.7.2	Características Probabilísticas De Las Series Financieras.....	26
2.7.3	Rendimientos Financieros.....	28
2.8	Prueba de Autocorrelación Serial.....	30
2.9	Criterios de Información.....	32
2.10	Métodos y Evaluación de Pronósticos.....	33
III.	MATERIALES Y MÉTODOS.....	36
3.1	Materiales.....	36
3.2	Metodología de la investigación.....	37
3.2.1	Tipo de Investigación.....	37
3.2.2	Diseño de la Investigación.....	37
3.2.3	Formulación de la Hipótesis.....	37
3.2.4	Descripción de Variable.....	37

3.2.5	Población y Muestra.....	38
3.2.6	Metodología Aplicada.....	38
3.3	Modelo Autoregresivo Condicional Heterocedástico (ARCH).....	39
3.3.1	Esperanza y Varianza No-Condiciona proceso ARCH (1).....	40
3.3.2	Esperanza y Varianza Condiciona proceso ARCH (1).....	41
3.3.3	Generalización ARCH (q).....	42
3.3.4	Estimación de un ARCH (q).....	44
3.3.5	Modelo ARCH (q) de Regresión.....	50
3.3.6	Condición de Estacionariedad de un ARCH (q).....	55
3.3.7	Predicción con modelos ARCH (q).....	59
3.4	Modelo de Heterocedasticidad Condicional Autoregresivo Generalizado (GARCH).....	63
3.4.1	Esperanza y Varianza No-Condiciona proceso GARCH (1,1).	65
3.4.2	Esperanza y Varianza Condiciona proceso GARCH (1,1).....	66
3.4.3	Condición de Estacionariedad de un GARCH (p, q).....	68
3.4.4	Contraste de estructura GARCH (p,q).....	72
3.4.5	Modelo GARCH de Regresión.....	77
3.4.6	Predicción con modelos GARCH (p,q).....	80
IV.	APLICACIÓN Y DISCUSIÓN.....	82
V.	CONCLUSIONES.....	119
VI.	RECOMENDACIONES.....	120
VII.	BIBLIOGRAFÍA.....	121

ÍNDICE DE CUADROS

Cuadro 1: Función de autocorrelación simple y parcial del IGBVL.....	86
Cuadro 2: Test de Dickey y Fuller Aumentado para IGBVL.....	88
Cuadro 3: Función de autocorrelación simple y parcial de la RIGBVL.....	89
Cuadro 4: Test de Dickey y Fuller Aumentado para la RIGBVL.....	90
Cuadro 5: Modelo AR (1) de la RIGVBL.....	92
Cuadro 6: Modelo MA (1) de la RIGVBL.....	93
Cuadro 7: Modelo ARMA (1,1) de la RIGVBL.....	93
Cuadro 8: Función de autocorrelación simple y parcial: Errores del modelo AR (1) de la RIGBVL.....	95
Cuadro 9: Correlograma de los errores al cuadrado del modelo AR (1) de la RIGBVL.....	98
Cuadro 10: Función de autocorrelación simple y parcial: Errores al cuadrado del modelo AR (1) de la RIGBVL.....	101
Cuadro 11: Test ARCH-LM para la RIGBVL.....	102
Cuadro 12: Modelo GARCH (1,1) para la RIGBVL.....	104
Cuadro 13: Modelo GARCH (1,2) para la RIGBVL.....	105
Cuadro 14: Modelo GARCH (2,1) para la RIGBVL.....	106
Cuadro 15: Modelo ARCH (1) para la RIGBVL.....	107
Cuadro 16: Modelo GARCH (2,2) para la RIGBVL.....	108
Cuadro 17: Resultados al aplicar los modelos GARCH y ARCH.....	109
Cuadro 18: Función de autocorrelación simple y parcial: Errores del modelo GARCH (1,1).....	110
Cuadro 19: Test ARCH-LM para el modelo GARCH(1,1).....	112
Cuadro 20: Pronostico dinámico de la RIGBVL, Ultima semana de Diciembre 2011 Modelo GARCH (1,1).....	114
Cuadro 21: Pronostico estático de la RIGBVL, Ultima semana de Diciembre 2011 Modelo GARCH (1,1).....	115
Cuadro 22: Pronostico dinámico de la RIGBVL, Primera semana de Enero 2012 Modelo GARCH (1,1).....	117
Cuadro 23: Pronostico estático de la RIGBVL, Primera semana de Enero 2012 Modelo GARCH (1,1).....	118

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Serie del IGBVL diario, periodo 2009 – 2011.....	82
Figura 2: Histograma de la RIGBVL diaria, periodo 2009 – 2011.....	97
Figura 3: Quantile- Quantile de la RIGVBL diaria, periodo 2009 – 2011.....	98
Figura 4: Errores al cuadrado del modelo AR (1) de la RIGBVL.....	100
Figura 5 Histograma de Errores del modelo GARCH (1,1).....	113

RESUMEN

El presente trabajo tiene como objetivo describir los modelos de varianza condicional ARCH y GARCH junto con sus propiedades y demostraciones, estos modelos se aplican en series de tiempo financieras, debido a que estas presentan como característica principal una fuerte volatilidad con periodos de calma o agitación, lo cual no permite utilizar los modelos de series de tiempo tradicionales que asumen varianzas constantes. Así mismo se realizó una aplicación utilizando como variable el valor diario del Índice General de la Bolsa de Valores de Lima (IGBVL), periodo 2009 – 2011, para la aplicación se utilizó el software econométrico Eviews 7.

Al analizar los resultados de las estimaciones de los modelos que explicarían la volatilidad diaria de la Rentabilidad del Índice General de la Bolsa de Valores (RIGBVL), periodo 2009 – 2011, se concluyó que el modelo GARCH (1,1) es el adecuado, debido a que el modelo GARCH (1,1) tiene a diferencia de los demás modelos el menor valor tanto en el criterio de información de Akaike (AIC) como en el criterio de información de Schwarz. Previamente se modeló la media de la RIGVBL con el modelo AR (1).

Palabras Clave: Modelos ARCH y GARCH, volatilidad, IGVBL.

ABSTRACT

This paper aims to describe models conditional variance ARCH and GARCH and their properties and demonstrations, these models are applied in financial time series, because these appear like main feature highly volatile with periods of calm or agitation, making it impossible to use the model of traditional time series assuming constant variances. Also an application using as a variable the daily value of the General Index of the Lima Stock Exchange (IGBVL), period from 2009 to 2011, was performed to implement the econometric software Eviews 7 is used.

In analyzing the results of the estimates of the models that explain the daily volatility of the Index General Performance Stock Exchange (RIGBVL) period from 2009 to 2011, concluded that the GARCH (1,1) model is right, because the GARCH (1,1) is unlike other models the lowest value in both the Akaike information criterion (AIC) and the Schwarz information criterion. Stocking previously RIGVBL with AR model (1) was modeled.

Keywords: ARCH and GARCH models, volatility, IGVBL.

I. INTRODUCCION

En la actualidad estudiar a las disciplinas que tienen un comportamiento variado y que influyen de manera directa o indirecta en nuestra sociedad, es de gran interés, como por ejemplo la economía y la meteorología. Estas se encuentran constantemente recabando información cada minuto, hora, día o en determinados periodos establecidos por los interesados respecto a un fenómeno determinado, permitiéndoles así tener un historial actualizado del estudio, aún así para comprender un determinado suceso, no solo es relevante la información *in situ*, sino también se necesita tener al alcance toda la información pasada que se recabó del estudio, lo cual permitirá un mejor análisis del fenómeno. Es aquí donde la estadística interviene de manera protagónica, porque hace uso de toda la información recabada en su conjunto, comúnmente todo este conjunto de datos recibe el nombre de serie temporal; la cual es una secuencia de datos, observaciones o valores, medidos en determinados momentos del tiempo, ordenados cronológicamente y, normalmente espaciados entre sí de manera uniforme; con el objetivo de analizar, modelar y predecir el fenómeno de interés. Un caso particular se presenta en las distintas series financieras, las cuales son de principal interés en la actualidad debido a la importancia que implica su comprensión.

Dentro de las características principales que tienen las series financieras se encuentra la volatilidad, de manera que conocer el comportamiento de la volatilidad resulta crucial debido a que un exceso de volatilidad dificulta la planificación financiera y podría significar enormes pérdidas y/o ganancias. Al analizar la volatilidad en especial el de las series financieras, estas no se comportan de manera constante con lo cual no se puede hacer uso de los modelos de series de tiempo tradicionales.

Engle (1982) desarrolló una nueva clase de procesos llamados modelos ARCH, en los cuales la varianza condicionada a la información pasada no es constante, y depende del cuadrado de las innovaciones pasadas, mientras que Bollerslev (1986) generaliza los modelos ARCH al proponer los modelos GARCH en los cuales la varianza condicional depende no solo de los cuadrados de las perturbaciones, como Engle, sino además, de las varianzas condicionales de períodos anteriores, con lo cual mediante los modelos ARCH y GARCH la modelización y predicción de la volatilidad de las series financieras mejora.

El objetivo principal del presente trabajo es:

- Modelar la volatilidad diaria del Índice General de la Bolsa de Valores de Lima (IGVBL), periodo 2009 – 2011, mediante el uso de los modelos de varianza condicional ARCH y GARCH, usando el software econométrico EViews.

A partir del objetivo principal se desprenden los objetivos específicos:

1. Presentar el desarrollo teórico de los modelos de varianza condicional ARCH y GARCH.
2. Realizar el proceso de modelación del valor diario del Índice General de la Bolsa de Valores Lima, periodo 2009 – 2011, mediante los modelos de varianza condicional ARCH y GARCH.
3. Elegir el modelo al cual se ajuste mejor el valor diario del Índice General de la Bolsa de Valores Lima, periodo 2009 – 2011.
4. Realizar el pronóstico de la volatilidad de la rentabilidad diaria del Índice General de la Bolsa de Valores Lima, periodo 2009 – 2011, para los días de la primera semana del mes de Enero del año 2012.

El resto del documento se encuentra estructurado de la siguiente forma: en el capítulo II se realiza una revisión bibliográfica de los modelos autorregresivos y de heterocedasticidad condicional autoregresiva, analizando sus propiedades y

sus distintos tipos de representación, como son los modelos ARCH y GARCH; en el capítulo III se describe los materiales y se desarrolla la parte teórica de los modelos de heterocedasticidad condicional autoregresiva; en el capítulo IV se muestra los resultados del proceso de modelación de la serie en estudio así como el análisis de estos; y por último en el capítulo V y VI se presenta las conclusiones y recomendaciones respectivamente.

II. REVISIÓN BIBLIOGRAFICA

2.1 Introducción

El análisis de series de tiempo, propuesta por Box & Jenkins (1976), plantean el modelamiento de una serie a partir de que ésta sea estacionaria (ya sea en el sentido fuerte o débil), olvidando en parte la volatilidad del proceso del cual proviene la misma, característica que en la actualidad se ha convertido en un elemento clave en la toma de decisiones, especialmente en mercados financieros.

En estos mercados la volatilidad es una característica fundamental que se presenta a causa de los cambios que sufre el precio de los activos financieros como son: Bonos o Acciones, tanto al alza como a la baja, la medición y pronóstico de la volatilidad se da al analizar los rendimientos de los distintos activos financieros, el análisis de la volatilidad es de vital importancia para los inversionistas, para asegurarse o apalancarse frente a eventos que conlleven a pérdidas que no se puedan cubrir (incertidumbre), la ausencia de un análisis de la volatilidad debilita todo proceso de toma de decisiones. Al considerar la volatilidad como un proceso aleatorio se busca ajustar un modelo que permita describir y analizar su comportamiento histórico y a partir de éste su comportamiento futuro.

Como alternativas aparecen los modelos ARCH (Autorregresive Condicional Heterocedastic) y GARCH (Generalized Autorregresive Condicional Heterocedastic) propuestos por Engle (1982) y Bollerslev (1986) respectivamente, modelos que permiten especificar el comportamiento de la varianza. Estos modelos se plantean modelando la media condicional y la varianza condicional. La diferencia entre lo condicional y no condicional es que la expectativa condicional se refiere a una expectativa hacia el futuro, pero sujeta a la información observada hasta el momento t (corto plazo).

2.2 Procesos Estocásticos

Un proceso estocástico es una sucesión de variables aleatorias Y_t , ordenadas y equidistantes cronológicamente, referidas a una (proceso univariante o escalar) o varias (proceso multivariante vectorial) características de una unidad observable en diferentes momentos, pudiendo tomar “t” cualquier valor entre $-\infty$ y $+\infty$, De Arce y Mahia (2000). La siguiente sucesión de variables aleatorias puede ser considerada como un proceso estocástico:

$$Y_{-5}, Y_{-4}, Y_{-3}, Y_{-2}, Y_{-1}, \dots, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \quad (2.2.1)$$

el subíndice “t” no tiene, en principio, ninguna interpretación a priori, aunque si hablamos de proceso estocástico en el contexto del análisis de series temporales este subíndice representará el paso del tiempo.

Cada una de las variables aleatorias (Y_t) que son parte de un proceso estocástico tendrán su propia función de distribución con sus correspondientes momentos. Así mismo, cada par de esas variables tendrán su correspondiente función de distribución conjunta y su función de distribución marginal. Esto mismo ocurrirá, ya no para cada par de variables, sino para conjuntos más amplios de las mismas. Habitualmente, conocer esas funciones de distribución resulta complejo de forma que, para caracterizar un proceso estocástico, basta con especificar la media y la varianza para cada Y_t y la covarianza para variables referidas a distintos valores de “t”:

$$E[Y_t] = \mu_t \quad , \text{ es constante e independiente de } t=1,2,\dots$$

$$\sigma_t^2 = Var[Y_t] = E[Y_t - \mu_t]^2 \quad , \text{ es constante e independiente de } t=1,2,\dots$$

$$Cov(Y_t, Y_{t+k}) = \gamma_k \quad , \text{ en función de k pero no de } t=1,2,\dots$$

las distribuciones de probabilidad podrían no estar completamente caracterizadas en algunas de las variables, los momentos podrían no coincidir incluso no existir para alguna de las variables aleatorias, lo mismo puede ocurrir con las distribuciones conjuntas o marginales. Sin embargo, de todos los tipos de procesos estocásticos posibles, nos interesan especialmente dos de ellos a los que la estadística ha dado nombres precisos:

Ruido Blanco.- Según De Grange (2005), es una sucesión de variables aleatorias (proceso estocástico) idéntica e independientemente distribuidas (*IID*) con media cero y varianza constante, lo cual suele representarse como $(\varepsilon_t) \sim IID(0, \sigma^2)$. Cuando cada ε_t sigue una distribución normal, ε_t se denomina un proceso de ruido blanco normal gaussiano.

Representación estadística del proceso de ruido blanco:

$$E[\varepsilon_t] = 0$$

$$\sigma^2 = Var[\varepsilon_t] = E[\varepsilon_t - \mu_t]^2$$

$$Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}) = 0$$

Proceso Estocástico Estacionario

Las series de tiempo económicas y principalmente las financieras generalmente están compuestas por una tendencia, un comportamiento estacional, un cíclico y un componente irregular.

Para Gujarati (2010), una serie se define como estacionaria cuando no presenta tendencia y su desarrollo corriente se encuentra alrededor de su media; es decir cualquier shock que sufra en cualquier momento en el tiempo no tendrá efectos permanentes y solo se alejaría temporalmente de su equilibrio. En caso que la serie no sea estacionaria, el camino que recorre a través del tiempo está

determinado por los shocks que percibe durante su trayectoria y son estos los que determinan íntegramente su recorrido; no presenta una media determinada.

Sin embargo para definir la estacionariedad de un proceso estocástico (sucesión de variables aleatorias) puede utilizarse bien las funciones de distribución o los momentos muestrales. En el primer caso se enuncian las propiedades de estacionariedad en sentido estricto o fuerte; esto es, si las funciones de distribución conjuntas son invariantes respecto a un desplazamiento en el tiempo (variación de t). Es decir, considerando que $t, t+1, t+2, \dots, t+k$ reflejan períodos sucesivos:

$$F(Y_t, Y_{t+1}, \dots, Y_{t+k}) = F(Y_{t+m}, Y_{t+1+m}, \dots, Y_{t+k+m}) \quad (2.2.2)$$

para cualquier t, k y m .

Esta definición de estacionariedad se conoce como estacionariedad en sentido estricto o fuerte y puede relajarse sustancialmente utilizando la denominada estacionariedad en sentido amplio o débil, Greene (1999).

En el segundo caso se enunciará la propiedad de estacionariedad en el sentido amplio o débil, donde a partir del concepto de estacionariedad en sentido estricto, se describe tres propiedades:

Decimos que un proceso estocástico es débilmente estacionario si:

- Las esperanzas matemáticas de las variables aleatorias no dependen del tiempo, son constantes:

$$E[Y_t] = E[Y_{t+k}] \quad \forall k$$

- Las varianzas tampoco dependen del tiempo y son finitas:

$$Var[Y_t] = Var[Y_{t+k}] \neq \infty \quad \forall k$$

- Las covarianzas entre dos variables aleatorias del proceso correspondientes a períodos distintos de tiempo (distintos valores de t) solamente dependen del lapso de tiempo transcurrido entre ellas:

$$Cov(Y_t, Y_s) = Cov(Y_{t+k}, Y_{s+k}) \quad \forall k$$

En lo sucesivo cuando se hable de un proceso estacionario se hará referencia a un proceso estocástico estacionario en sentido débil.

Así mismo para probar si nuestras series son estacionarias se aplicará el Test de Dickey Fuller Aumentado para las diferentes muestras.

2.3 Principales Características y Conceptos de las Series Temporales

Cambio Estructural.-Según Pulido y Pérez (2001), se puede definir como el cambio estructural a la variación atípica del conjunto de observaciones generada por una innovación o alteración en la estructura económica básica sobre la cual se sustenta la serie, por lo que el cambio estructural está íntimamente ligado a la noción de estabilidad de parámetros ya que al producirse un quiebre, los parámetros no serán constantes durante todo el periodo muestral.

El cambio estructural se genera en el periodo donde se detecta un quiebre pronunciado dentro de la evolución de la serie. Así mismo, puede darse en el intercepto, en una o varias pendientes del modelo o en ambos y la solución es particular para cada caso (para ello se definirán las llamadas variables dicotómicas, binarias o “dummies” en intercepto o pendiente). Por ello es más

importante identificar dichos cambios estructurales en series de tiempo que en modelos de corte transversal.

Es importante notar la existencia de cambios estructurales durante el desarrollo de las pruebas de raíces unitarias.

Tendencia Determinística.- Toda serie tiene tendencia determinística cuando el componente de tendencia es uniforme, es decir, se muestran incrementos o decrementos constantes, incluso esta tendencia podría ser horizontal, Gujarati (2010).

Un modelo para una serie temporal y_t que presenta tendencia determinística, puede ser expresado como:

$$y_t = \alpha + \delta t + \mu_t, \quad t=1,2,\dots, T \quad (2.3.1)$$

donde:

y_t : Variable dependiente en el tiempo t .

α : Coeficiente constante.

δ : Coeficiente de tendencia lineal.

t : Variable de tendencia lineal (Tiempo).

μ_t : Término residual aleatorio en el tiempo t .

Este tipo de proceso, se clasifica dentro de aquellos que vienen definidos por su tendencia.

Tendencia Estocástica.- Gujarati (2010), define que toda serie tiene tendencia estocástica cuando el componente de tendencia es cambiante de manera aleatoria en el tiempo, es decir no es constante. A su vez existen diversos métodos para filtrar o estimar esta tendencia. Un modelo con tendencia estocástica es determinado como un paseo aleatorio simple quedando expresado de la siguiente forma:

$$y_t = y_{t-1} + \mu_t, \quad t=1,2,\dots, T \quad (2.3.2)$$

$$\Delta y_t = \mu_t$$

donde:

y_t : Variable dependiente en el tiempo t .

y_{t-1} : Variable independiente con un rezago en el tiempo t .

μ_t : Término residual aleatorio en el tiempo t .

Estacionalidad.- Según De Arce y Mahia (2000), la estacionalidad se refiere a las oscilaciones que acontecen dentro del año y que se van repitiendo en años sucesivos, por consecuencia de factores climáticos, organizativos y administrativos. Así como los ciclos se caracterizan por su irregularidad también el componente estacional puede presentar movimientos similares de un periodo a otro.

Prueba de Dickey – Fuller Aumentada (DFA)

La prueba Dickey-Fuller Aumentada es un test exigente para determinar la estacionariedad de una serie de tiempo, esta prueba tiene la ventaja de que la hipótesis nula valida la presencia de raíz unitaria en la serie, el test puede realizarse en tres formas, es decir, como caminata aleatoria, caminata aleatoria con intercepto y caminata aleatoria con intercepto y tendencia, es aconsejable hacer siempre este último, para corregir el efecto de la tendencia si existiera, Gujarati (2010).

Sea:

y_t es una caminata aleatoria:

$$\Delta y_t = \delta y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \alpha_i \Delta y_{t-1} + \mu_t$$

y_t es una caminata aleatoria con intercepto:

$$\Delta y_t = \beta_1 + \delta y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \alpha_i \Delta y_{t-1} + \mu_t$$

y_t es una caminata aleatoria con intercepto y tendencia:

$$\Delta y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \delta y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \alpha_i \Delta y_{t-1} + \mu_t$$

donde $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$, $\delta = \rho - 1$ y μ_t es ruido blanco en los tres casos.

Bajo la hipótesis:

$$H_0: \delta = 0$$

$$H_0: \delta \neq 0$$

Si la prueba τ calculada excede a los τ críticos o tabulados de MacKinnon o el p-valor < Nivel de significancia (1%,5% o 10%), entonces la serie es estacionaria, es decir no se tiene evidencia para aceptar la presencia de raíz unitaria. Es importante notar que el estadístico de contraste τ para la δ no es la prueba t usual sino que Dickey-Fuller (1979) y MacKinnon (1994) mediante simulaciones de Montecarlo, construyeron unas tablas especiales.

El término $\sum_{i=1}^p \alpha_i \Delta y_{t-1}$ (que es la única diferencia respecto a la Dickey-Fuller normal) se incluye para recoger y corregir la autocorrelación serial de los errores. Un problema es determinar el número de retardos (p) apropiados, si es demasiado grande o demasiado pequeño puede provocar que series no estacionarias aparezcan como estacionarias. Normalmente probar incluyendo 4-7

retardos es suficiente. Phillips - Perron (1988) recomiendan $p = \left\lfloor 4 \left(\frac{N}{100} \right)^{2/9} \right\rfloor$, que arroja una cifra entre 3 y 6 cuando N oscila entre 30 y 1000 observaciones.

Inferencia estadística - Estimación puntual

La estadística provee técnicas que permiten obtener conclusiones generales a partir de un conjunto limitado – pero representativo – de datos. Cuando inferimos no tenemos garantía de que la conclusión que obtenemos sea exactamente correcta. Sin embargo, la estadística permite cuantificar el error asociado a la estimación.

El objetivo de la estimación puntual es usar una muestra para obtener números que, en algún sentido, sean los que mejor representan a los verdaderos valores de los parámetros de interés. Un estimador puntual de un parámetro θ es un valor que puede ser considerado representativo de θ y se indicará como $\hat{\theta}$. Se obtiene a partir de alguna función de la muestra.

Métodos de estimación puntual

Método de momentos: La idea básica consiste en igualar ciertas características muestrales con las correspondientes características poblacionales.

Definición: Sea X una variable aleatoria (v.a.) con función de probabilidad puntual $p_X(x)$ en el caso discreto o función de densidad $f_X(x)$ en el caso continuo. Se define *momento de orden k*, ($k \in \mathbb{N}$) o momento poblacional de orden k $E(X^k)$, por:

$$E(X^k) = \begin{cases} \sum_x x^k p_X(x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x) \partial x \end{cases}$$

si esas esperanzas existen.

Dada una muestra aleatoria X_1, X_2, \dots, X_n , el momento muestral de orden k es:

$$a_k = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^k}{n}$$

Método de máxima verosimilitud: Este método fue introducido por Fisher (1920). Se basa en la idea que dada una muestra, se deben hallar los valores de los parámetros que hacen que la probabilidad de obtener dicha muestra sea máxima.

Definición: Sean X_1, X_2, \dots, X_n v.a. con función de probabilidad conjunta $p_{\vec{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ o función de densidad conjunta $f_{\vec{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que depende de k parámetros $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$. Cuando (x_1, x_2, \dots, x_n) son los valores observados y la función de probabilidad o de densidad conjunta se considera función de los parámetros $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$, se denomina función de verosimilitud y se denota $L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$.

La forma general de los EMV se obtiene reemplazando la v.a. X_1 por los valores observados x_1 .

Propiedades de los estimadores de máxima verosimilitud

Si $\hat{\theta}_k$ es el estimador de máxima verosimilitud de θ para una m.a.s. de tamaño n , entonces:

- Si $g(\cdot)$ es biyectiva, $g(\hat{\theta}_k)$ es estimador de máxima verosimilitud de $g(\theta)$.
- Si $n \rightarrow \infty, E(\hat{\theta}_k) \rightarrow \theta$ (es *asintóticamente* centrado)

- Si $n \rightarrow \infty, V(\hat{\theta}) \rightarrow v_k$, siendo v_k la mínima varianza posible (es *asintóticamente* eficiente)
- Si $n \rightarrow \infty, \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{V(\hat{\theta}_k)}} \approx N(0,1)$ (es *asintóticamente* normal)

Si existe un estimador centrado y eficiente para θ , entonces coincide con el de máxima verosimilitud. Es decir, para valores suficientemente grandes de n (*asintóticamente*) tienen todas las propiedades “deseables” de los estimadores, por lo que suelen ser los más utilizados.

Propiedades de los estimadores y criterios de selección

Observemos que, dada una muestra X_1, X_2, \dots, X_n un estimador puntual del parámetro θ , obtenido en base a ella, es una v.a. $\hat{\theta}$.

La diferencia:

$$\hat{\theta} - \theta$$

es el error de estimación y una estimación será más precisa cuanto menor sea este error.

Este error es también una v.a. dado que depende de la muestra obtenida. Para algunas muestras será positivo, para otros negativos. Una propiedad deseable es que la esperanza del error sea 0, es decir que “en promedio” el error obtenido al estimar a partir de diferentes muestras sea cero.

Definición: Un estimador puntual $\hat{\theta}$ del parámetro θ es insesgado si

$$E(\hat{\theta}) = \theta, \forall \theta$$

si $\hat{\theta}$ no es insesgado, se denomina sesgo de $\hat{\theta}$ a:

$$b(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$$

por lo tanto, un estimador es insesgado si su distribución tiene como valor esperado al parámetro que se desea estimar.

Definición: Un estimador puntual $\hat{\theta}$ del parámetro θ basado en una muestra X_1, X_2, \dots, X_n , es asintóticamente insesgado si:

$$E(\hat{\theta}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta \quad \forall \theta$$

Una medida de la calidad de un estimador para θ no solo es que su media sea el parámetro, sino que haya una alta probabilidad de que los valores observados de $\hat{\theta}$ sean próximos a θ (varianza lo más pequeña posible)

Dado $\hat{\theta}$ insesgado para θ , se dice que $\hat{\theta}$ es insesgado de mínima varianza para θ si para cualquier otro estimador insesgado $\hat{\theta}^*$ de θ se verifica

$$V(\hat{\theta}) \leq V(\hat{\theta}^*)$$

No existen estimadores insesgados con varianza tan pequeña como quisiéramos (cota inferior para la varianza).

Teorema de Cramer-Rao:

Sea (X_1, X_2, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de una población X con función de densidad $f(x; \theta)$, siendo θ el parámetro que queremos estimar, y $\hat{\theta}$ un estimador insesgado de θ . Entonces, la varianza de $\hat{\theta}$ satisface la desigualdad:

$$V(\hat{\theta}) \geq -\frac{1}{nE\left[\frac{\partial^2 \log f(X; \theta)}{\partial \theta^2}\right]}$$

La varianza de los estimadores se encuentra armando la matriz de información de Fisher, que es simplemente la inversa de la matriz de segundas derivadas precedidas por un signo menos.

Definición: Sea $\hat{\theta}$ un estimador de θ , su error cuadrático medio es:

$$ECM(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$$

Si el estimador $\hat{\theta}$ es insesgado el error cuadrático medio es igual a la varianza del estimador.

Exigir un estimador con ECM pequeño implica minimizar simultáneamente su sesgo y su varianza. Para los estimadores insesgados, el criterio coincide con minimizar la varianza (acotada por el Teorema de Cramer - Rao), es decir, se busca el estimador eficiente.

Si se tuviera dos o más estimadores para el parámetro θ , se debe elegir el de menor ECM. Este principio se reduce, en el caso de estimadores insesgados, al de mínima varianza entre los insesgados mencionado más arriba, ya que el error cuadrático medio se reduce a la varianza cuando un estimador es insesgado. Sin embargo, nos permite además seleccionar, por ejemplo, entre un estimador insesgado y otro que no lo es, en base a la varianza y al sesgo. Si el estimador sesgado tiene una varianza mucho menor que el insesgado, podría ser preferible su uso.

Definición: Sea X_1, X_2, \dots, X_n una m.a de una distribución que depende de un parámetro θ y sea $\hat{\theta}_n$ un estimador puntual de θ basado en esa muestra. Diremos

que $\{\hat{\theta}_n\}$ es una sucesión consistente (o más brevemente que $\hat{\theta}_n$ es un estimador consistente de θ) si:

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta$$

es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon) = 1, \quad \forall \varepsilon > 0$$

esta expresión indica que a medida que se incrementa el tamaño muestral, la diferencia entre el estimador y el parámetro será menos que cualquier número (ε).

Definición: Un Estimador $\hat{\theta}_n$ del parámetro θ es suficiente, si contiene tanta información como la contenida en la propia muestra, de forma que ningún otro estimador pueda proporcionar información adicional sobre el parámetro desconocido de la población.

Se dice que un estadístico $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ es suficiente para θ si la distribución de X_1, X_2, \dots, X_n dado T es independiente del valor del parámetro θ .

2.4 Modelos Box y Jenkins

La teoría de los modelos Box y Jenkins (1976) es una clase especial de los procesos estacionarios. A continuación se procederá a examinar los siguientes tipos de procesos lineales: Modelos Puramente Aleatorios, Modelos Autoregresivos, Modelos de Medias Móviles y los obtenidos como combinación de estos últimos.

2.4.1 Modelos Puramente Aleatorios

Según De Grange (2005), es el proceso lineal más simple de todos. Se expresa de la siguiente forma:

$$y_t = \varepsilon_t \quad (2.4.1)$$

donde ε_t satisface las siguientes propiedades:

$$E[\varepsilon_t] = 0 \quad \forall t$$

$$E[\varepsilon_t^2] = \sigma^2 \quad \forall t$$

$$Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}) = 0$$

en el tratamiento de series cronológicas o temporales, suele designarse a un proceso puramente aleatorio con la denominación de “ruido blanco”.

2.4.2 Modelos Autoregresivos

Según De Arce y Mahia (2000), en el proceso autoregresivo de orden “ p ” la observación actual y_t es generada por una media ponderada de observaciones anteriores que se remontan “ p ” periodos en el pasado, junto con una perturbación aleatoria correspondiente al periodo actual. Se simboliza este proceso por AR (p) y su ecuación es:

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (2.4.2)$$

donde:

y_t : Variable dependiente.

$y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-p}$: Variables independientes que son variables dependientes desfasadas un número específico de periodos.

$\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$: Coeficientes de regresión que serán estimados.

ε_t : Término de residuo que representa sucesos aleatorios no explicados por el modelo.

Un caso particular de los modelos autorregresivos son los AR (1), cuya ecuación es la siguiente:

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.4.3)$$

Un proceso autoregresivo de primer orden es estacionario solo si $|\phi_1| < 1$, al cumplir esta condición la media condicional de y_t esta dada por:

$$E(y_t) = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1}$$

2.4.3 Modelo De Promedio Móvil

Un modelo de los denominados de medias móviles es aquel que explica el valor de una determinada variable en un período t en función de un término independiente y una sucesión de errores correspondientes a períodos precedentes, ponderados convenientemente, De Arce y Mahia (2000).

Un modelo de promedio móvil de orden “q” adopta la forma:

$$y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (2.4.4)$$

donde:

y_t : Variable respuesta (dependiente) en el tiempo t.

μ : Valor promedio que permanece constante en el proceso.

$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$: Coeficientes que serán estimados.

ε_t : Término de error que representa los efectos de las variables no explicadas por el modelo.

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{t-q}$: Errores en periodos anteriores al tiempo t, incorporados en la respuesta y_t

2.4.4 Modelo Autoregresivos De Promedio Móvil

Según Gujarati (2010), además de los modelos AR (p) y MA (q), ambos se pueden combinar en un tercer tipo de modelo general denominado ARIMA (p,q). Se expresa de la siguiente forma:

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (2.4.5)$$

Los modelos ARIMA (p,q) utilizan combinaciones de errores y valores anteriores ofreciendo un mayor potencial para ajustar modelos que no pudieron hacerlo en forma adecuada mediante los modelos AR (p) y MA (q) por si solos.

2.5 Modelos De Heterocedastisidad Condicional Autoregresiva

Robert Engle (1982), al pretender obtener una predicción adecuada para la inflación en el Reino Unido y basándose en las evidencias mostradas por esta variable financiera que presentaba ciertas características; como una alta

volatilidad seguida de periodos de calma y otros movimientos bruscos, características que solo se podían identificar en este tipo de variables, propuso un modelo econométrico denominado: Modelo Autoregresivo con Heterocedasticidad Condicional (ARCH), modelo no lineal que logra captar estas características, obteniéndose mejores predicciones que las que se obtuvieron mediante la aplicación de otros modelos que no consideraban la presencia de estos elementos, contrarrestando los problemas que tienen que ver con la eficiencia de los parámetros estimados.

2.5.1 Modelo ARCH

Engle (1982), realizó el primer intento de capturar el fenómeno de *volatility clustering*; propiedad que describe periodos de alta y baja varianza; a través de la especificación de una ecuación para la varianza condicional, el modelo propone una ecuación de regresión con errores que siguen un proceso ARCH para modelar la media y la varianza condicional de la serie de tiempo de interés. La forma de la media condicional está dada por un modelo AR(q):

$$y_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^q \beta_i y_{t-i} + \varepsilon_t, \quad l > 0 \quad \varepsilon_t / \Psi_{t-1} \sim N(0, h_t^2)$$

donde Ψ_{t-1} , representa la historia pasada de la variable dependiente y_t , $\varepsilon_t / \Psi_{t-1}$ es el error condicional del modelo AR(q), que se distribuye con una distribución normal con media cero y varianza h_t^2 . La ecuación de la varianza condicional toma la forma:

$$\varepsilon_t = v_t h_t$$

$$h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2, \quad q \geq 1 \quad (2.5.1)$$

donde v_t es un proceso idénticamente distribuido con media cero y varianza uno, ε_{t-i}^2 es el error cuadrado del modelo AR(q) hasta el periodo "t-1", α_0 y α_i son

los parámetros estimados del modelo ARCH(q), así mismo las restricciones $\alpha_0 > 0$ y $\alpha_i \geq 0$ son necesarias para asegurar que la varianza condicional sea positiva y se requiere que $\sum_{i=1}^m \alpha_i < 1$ para que la varianza condicional sea convergente.

2.5.2 Modelo GARCH

Los modelos GARCH surgen debido a que el modelo ARCH necesitaba con frecuencia una estructura de rezagos muy larga de la varianza condicional para modelar la memoria de los datos. Para resolver este problema Bollerslev (1986) propuso el modelo GARCH que permite capturar la memoria larga y se caracteriza por tener una estructura de rezagos más flexible. La varianza condicional en este modelo esta especificado como sigue:

$$h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}^2 \quad p \geq 1, q \geq 1 \quad (2.5.2)$$

donde ε_{t-i}^2 es el error al cuadrado del modelo AR(q) hasta el periodo "t-1", h_{t-j}^2 es la varianza conocida hasta el momento "t-1", α_0, α_i y β_j son los parámetros estimados del modelo GARCH(p,q), las restricciones $\alpha_0 > 0, \alpha_i > 0, \beta_j > 0$ son necesarias para asegurar que la varianza condicional sea positiva y se requiere que $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1, p \geq 1, q \geq 1$ para que la varianza condicional sea convergente.

2.5.3 Modelo TGARCH

Un primer modelo que es capaz de producir efectos asimétricos, establecido por Glosten, Jagannathan y Runkle (1993); es el modelo TGARCH (Threshold Heteroscedastic Autoregressive Models), este modelo depende de un umbral (threshold), por medio del cual se define el comportamiento de la volatilidad de la serie financiera a causa de los comportamiento al alza o a la baja del precio del mercado. En los mercados bursátiles se observa empíricamente

que los movimientos a la baja son generalmente más volátiles que los movimientos al alza. En particular, el modelo TGARCH (1,1) o Threshold ARCH propone la siguiente ecuación para estimar la varianza condicional:

$$h_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}^2 + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2 d_{t-1} \quad (2.5.3)$$

donde:

$$d_{t-1} = 1 \text{ si } \varepsilon_{t-1} < 0$$

$$d_{t-1} = 0 \text{ si } \varepsilon_{t-1} \geq 0$$

Es decir, valores negativos del residuo de la regresión son interpretadas como malas noticias para el mercado y los valores positivos representan las buenas noticias. Las malas noticias tendrán un impacto $(\alpha_1 + \gamma_1)$ sobre la varianza condicional, mientras que las buenas noticias solo impactarán en α_1 . Si $\gamma_1 > 0$, se dice que existe el efecto de apalancamiento (leverage effect); dicho efecto se refiere al hecho de que a rentabilidades negativas corresponda una mayor volatilidad condicional que a rentabilidades positivas. Si $\gamma_1 \neq 0$, se dice que el impacto de las noticias es asimétrico.

2.5.4 Modelo EGARCH

Los modelos ARCH y GARCH no capturan el hecho que con frecuencia los retornos están negativamente correlacionados con las variaciones en la volatilidad de los mismos. Esto sucede porque en dichos modelos la varianza se especifica solo en términos de la magnitud de los residuales rezagados y se ignoran los signos. En respuesta a este problema surgieron los modelos EGARCH, Nelson (1991), los cuales dependen tanto de la magnitud como del signo de los residuales rezagados. La varianza condicional para el modelo EGARCH (p,q) presenta la siguiente estructura:

$$\ln(h_t) = a_0 + \sum_{j=1}^q \beta_j \ln(h_{t-j}) + \sum_{i=1}^p \alpha_i \left| \frac{\varepsilon_{t-i}}{h_{t-i}} \right| + \sum_{k=1}^{\tau} \gamma_k \left| \frac{\varepsilon_{t-k}}{h_{t-k}} \right| \quad (2.5.4)$$

donde:

$\sum_{j=1}^q \beta_j \ln(h_{t-j})$: Componente de la varianza heterocedastica

$\sum_{i=1}^p \alpha_i \left| \frac{\varepsilon_{t-i}}{h_{t-i}} \right|$: Valor autoregresivo de la perturbación

$\sum_{k=1}^{\tau} \gamma_k \left| \frac{\varepsilon_{t-k}}{h_{t-k}} \right|$, donde $\gamma_k = \begin{cases} 1, & \text{si } \varepsilon_{t-k} < 0 \\ 0, & \text{si } \varepsilon_{t-k} \geq 0 \end{cases}$: Factor asimétrico

Los modelos GARCH estiman dos ecuaciones en simultáneo, ambas independientes pero a la vez complementarias al momento de realizar el modelado de la variable de interés bajo los modelos de volatilidad; la primera ecuación realiza el proceso de estimación de la media de la variable de interés que normalmente se ajusta a un modelo ARMA (p, q) y la segunda ecuación estima la varianza de la variable, tanto la media como la varianza son utilizadas al realizar el intervalo de confianza del pronóstico de la variable en estudio.

2.6 TEST ARCH-LM

El test del multiplicador de Lagrange (TEST ARCH-LM), definido por Engle (1982), consiste en medir la significancia estadística de los coeficientes de los errores al cuadrado contra sus rezagos mediante una regresión lineal, para probar la heterocedasticidad condicional, la cual es conocida como el efecto ARCH.

Esta prueba consiste en los siguientes tres pasos:

1. Estimar la media de la variable en estudio y obtener los residuos

$$\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-q} \text{ y } \varepsilon_{t-1}^2, \dots, \varepsilon_{t-q}^2$$

2. Estimar la regresión lineal:

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \hat{\alpha}_q \varepsilon_{t-q}^2 + v_t,$$

donde:

v_t : Denota el error del modelo de regresión.

$\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_q$: Coeficientes estimados de la regresión lineal.

$\varepsilon_{t-1}^2, \dots, \varepsilon_{t-q}^2$: Errores al cuadrado del modelo estimado para la media de la variable.

3. Calcular el estadístico de prueba de LM:

$$LM_{arch} = T \cdot R^2$$

donde:

T: Número de observaciones.

R^2 : Coeficiente de determinación de la regresión lineal estimada.

Bajo la siguiente hipótesis:

$H_0: \hat{\alpha}_0 = \hat{\alpha}_1 = \dots = \hat{\alpha}_q$ (La serie no presenta el efecto ARCH)

H_1 : Al menos un $\hat{\alpha}_i \neq 0, i = 1, \dots, q$ (La serie presenta el efecto ARCH)

Si $LM_{arch} > X_{(q)}^2(5\%)$, entonces se rechaza la H_0 , con lo cual existe evidencia suficiente para concluir la presencia de efecto ARCH en los errores al cuadrado a un nivel de significancia del 5%.

2.7 Volatilidad

2.7.1 Definición

Se entiende a la volatilidad como una medida de riesgo que deriva de los cambios de rentabilidad de los activos financieros (Bonos o Acciones), debido a su sensibilidad a informes o rumores de índole política, económica, de políticas económicas gubernamentales, monetarias o fiscales, entre otros. La causa de estos cambios en la rentabilidad se encuentra en las variaciones de los precios de los activos financieros (Bonos o Acciones), que en último término, se deben a las informaciones que llegan constantemente al mercado.

Podemos, entonces, definir a la volatilidad como “una medida de la intensidad de los cambios aleatorios o impredecibles en la rentabilidad o en el precio de los activos financieros (Bonos o Acciones). Se asocia estadísticamente a la volatilidad con la desviación o variabilidad del rendimiento de los activos financieros (Bonos o Acciones) en torno a su valor medio”, Márquez (2002).

En general las variables macroeconómicas como: PBI, Tasa de Desempleo, Inflación y el precio de los activos financieros (Bonos o Acciones) en la Bolsa de Valores, son variables con alta volatilidad.

2.7.2 Características Probabilísticas De Las Series Financieras

Las series financieras presentan ciertas regularidades en su comportamiento que posibilitan su modelado y predicción. Algunas de éstas son expuestas a continuación:

- **Exceso de Curtosis o 'fat tail'**.- Mandebrot y Fama (1963), definen que el exceso de curtosis se presenta cuando la distribución de probabilidad de los rendimientos muestran colas más amplias a diferencia de la distribución normal o Gaussiana.
- **Persistencia o conglomerado de volatilidad o "Volatility Clustering"**.- Si la volatilidad es elevada en un periodo, tiende a seguir siéndolo en lo posterior; si es baja, también tendera a seguir siendo baja en lo sucesivo, Mandebrot (1963).
- **Salto discontinuo del Precio "Discontinuous price jump"**.- Según Figlewski (1997) menciona que se pueden producir valores muy altos de volatilidad en momentos concretos y sin seguir una tendencia determinada. Este mismo autor, también explica que los periodos de alta o baja volatilidad acostumbran a ir seguidos de periodos en los que la volatilidad se modera a largo plazo.
- **Comportamiento asimétrico de las series temporales**.- Este fenómeno puede comprobarse cuando se vive en un mercado alcista, mercado cuyos precios están en constante situación de subida o bajada, donde una noticia positiva y otra negativa no tienen el mismo impacto en el mercado, siendo la noticia negativa la que mayor impacto provoca. Lo contrario sucede en los mercados bajistas, Campbell y Hentschel (1992). Todo esto, justifica el empleo de determinados modelos en el estudio de la volatilidad, como se verá en próximos apartados.
- **Relaciones entre mercados**.- Cuando se estudian mercados diferentes pero relacionados de alguna forma, se observa que movimientos importantes en uno de los mercados están relacionados con movimientos destacados en otros. Este hecho justifica el uso de modelos multivariantes para series temporales, Aydemir (1998).

2.7.3 Rendimientos Financieros

A la hora de llevar a cabo un estudio financiero, suele ser habitual trabajar con rendimientos y no con valores absolutos de los activos. Según Tsay (2002), hay dos motivos principales por lo que esto ocurre:

- El rendimiento del valor de un activo recoge de forma completa e independiente de escala la oportunidad de inversión.
- Los rendimientos son más manejables que los valores absolutos de los activos al presentar determinadas propiedades estadísticas.

Existen básicamente dos formas de calcular el rendimiento de una serie financiera:

Rendimiento Aritmético o Periodo Simple.- Siendo Y_t el valor del activo para un momento "t", el rendimiento periódico simple se define como:

$$r = \frac{(Y_t - Y_{t-1})}{Y_{t-1}} \quad (2.6.1)$$

Los rendimientos aritméticos anuales se definen por:

$$R = \frac{Y_t - Y_0}{Y_0}$$

donde Y_0 y Y_t son los valores del activo en el primer y último día de año respectivamente.

Por tanto, R también podrá reescribirse como:

$$R = \frac{Y_t}{Y_0} - 1 = \frac{Y_t Y_{t-1}}{Y_{t-1} Y_{t-2}} \dots \frac{Y_1}{Y_0} = \prod_{t=1}^T \frac{Y_t}{Y_{t-1}} - 1$$

Rendimiento Geométrico o Compuesto de Forma Continua.- Los rendimientos geométricos siguen la ecuación:

$$d = \log(Y_t) - \log(Y_{t-1}) \quad (2.6.2)$$

mientras que los rendimientos geométricos anuales se definen por:

$$D = \log(Y_t) - \log(Y_0) = \log\left(\prod_{i=1}^t \frac{Y_i}{Y_{i-1}}\right) = \sum_{i=1}^t \log\left(\frac{Y_i}{Y_{i-1}}\right) = \sum_{i=1}^t d_i \quad (2.6.3)$$

En la Ecuación (2.6.3) puede comprobarse que los rendimientos geométricos anuales son la suma de los rendimientos geométricos diarios. En los rendimientos aritméticos, esta propiedad no se cumple.

La relación entre los rendimientos geométricos y aritméticos viene dada por:

$$D = \log(1 + R)$$

El cálculo de la rentabilidad logarítmica presenta ventajas para su tratamiento estadístico en los modelos financieros. Estas ventajas se derivan de que pueden sumarse las rentabilidades sucesivas de un activo si se han calculado de manera continua, no ocurriendo esto cuando la rentabilidad se calcula de forma discreta. Es decir, la rentabilidad continua tiene la propiedad que la suma de las rentabilidades logarítmicas obtenidas de una serie temporal es igual que la

rentabilidad logarítmica calculada mediante el logaritmo neperiano del cociente de las cotizaciones del valor al principio y al final del periodo temporal.

La diferencia entre los dos rendimientos es despreciable cuando ambos rendimientos son pequeños, pero la diferencia crece conforme los rendimientos se hacen más grandes, lo cual se espera que suceda. Puesto que esperaríamos rendimientos más bajos en periodos cortos de tiempo y rendimientos superiores en periodos más largos de tiempo, la diferencia entre los dos tipos de rendimientos es despreciable en periodos cortos de tiempo, pero es potencialmente sustancial en periodos más largos de tiempo, razón por la cual se opta por elegir el rendimiento logarítmico.

2.8 Prueba de Autocorrelación Serial

Según Court y Rengifo (2011), para analizar la hipótesis de caminata aleatoria en series de tiempo financieras, el camino más práctico es por medio de la autocorrelación serial, método que nos proporciona la estadística para medir el grado de dependencia entre los términos de una serie. Si ε_t es el residuo de una serie histórica de precios de un determinado periodo para $t=1,2,\dots,n$, el coeficiente de autocorrelación viene definido por:

$$\rho_k = \text{cov}(\varepsilon_t; \varepsilon_{t+k}) / \sigma_{\varepsilon_t} \sigma_{\varepsilon_{t+k}} \quad (2.6.4)$$

donde:

ρ_k : Coeficiente de correlación serial.

$\text{cov}(\varepsilon_t; \varepsilon_{t+k})$: Covarianza de ε_t y ε_{t+k} .

σ_{ε_t} : Desviación estándar de ε_t .

$\sigma_{\varepsilon_{t+k}}$: Desviación estándar de ε_{t+k} .

Si el coeficiente de autocorrelación es igual a 1 el grado de correlación es perfecto positivo y cuando es igual a -1, la correlación es perfecta negativa. El análisis de autocorrelación requiere tomar diferentes "lag" o rezagos (posibles valores de k) ya que la no existencia de correlación indicará que la serie es un proceso puramente aleatorio de ruido blanco.

En el modelo de caminata aleatoria de las cotizaciones se presupone que la sucesión de precios son independientes; es decir que no exista entre ellos autocorrelación serial, así mismo sucede con el cambio de los precios en diferentes periodos cuando la sucesión de precios son independientes.

Court y Rengifo (2011) presentan dos métodos que permiten determinar la existencia de autocorrelación hasta un determinado orden k , que se presenta a continuación.

El método de Box-Pierce y el método de Ljung-Box permiten probar la siguiente hipótesis nula:

$$H_0: \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \dots = \rho_k = 0$$

El test de Box-Pierce se calcula mediante:

$$\text{Estadístico } Q \text{ de Box-Pierce } (Q) = n \sum_{j=1}^k \hat{\rho}_j^2 = \sum_{j=1}^k (\sqrt{n} \hat{\rho}_j)^2 \sim X^2(k)$$

El test de Ljung-Box:

$$\text{Estadístico de Ljung-Box } (Q) = n(n+2) \sum_{j=1}^k \frac{\hat{\rho}_j^2}{n-j} = \sum_{j=1}^k \frac{n+2}{n-j} (\sqrt{n} \hat{\rho}_j)^2 \sim X^2(k)$$

Los grados de libertad de esta distribución son iguales a k , que representa el número de rezagos deseados.

El método de Ljung-Box es preferido cuando el tamaño de la muestra es pequeño. Como se puede observar, la diferencia entre estos dos métodos desaparece conforme n (número de observaciones) se incrementa. Para aceptar la hipótesis nula el valor del estadístico Q de Box-Pierce o el estadístico de Ljung-Box, según sea el caso, debe ser menor al valor crítico de la distribución chi-cuadrada con k grados de libertad, $X^2(k)$, o la probabilidad asociada al estadístico Q de Box-Pierce o el estadístico de Ljung-Box sea mayor al 5% de nivel de significancia.

2.9 Criterios Información

Existen varios criterios de información disponibles para elegir qué modelo se adecúa mejor a los datos. Todos estos criterios de información se basan en el análisis de máxima verosimilitud.

Criterio de Información Akaike (AIC):

Desarrollado por Akaike (1973), se define como:

$$AIC = \frac{-2}{T} \ln(\text{verosimilitud}) + \frac{2}{T} n^{\circ} \text{parámetros}$$

donde la función de verosimilitud es evaluada con estimaciones de máxima verosimilitud y T es el tamaño de la muestra. El mejor modelo será aquel que obtenga un menor valor de AIC. Por tanto, el Criterio de Información Akaike penaliza los modelos por incluir más parámetros.

Criterio de Información de Schwarz o Bayesiano (BIC)

Este criterio introduce una penalización aún mayor que el criterio Akaike para el uso de parámetros, fue propuesto por Schwarz (1978) a partir de un enfoque bayesiano.

$$BIC = \frac{-2}{T} \ln(\text{verosimilitud}) + \frac{2}{T} (n^0 \text{ parámetros } \log(n^0 \text{ observaciones}))$$

El mejor modelo será el que obtenga un menor BIC.

2.10 Métodos y Evaluación de Pronósticos

Dentro de los métodos de pronóstico existen dos métodos muy usados:

Método de Pronóstico Dinámico

Este método realiza pronósticos r-periodos delante, este método de pronóstico tiene como característica utilizar el último valor pronosticado disponible para el siguiente pronóstico, permitiendo la realización proyecciones a dos o más periodos hacia delante.

Método de Pronóstico Estático

Este método realiza pronósticos solo un periodo delante. Luego, para el siguiente pronóstico usa el dato correspondiente a la variable (no su valor pronosticado) y con base en estos se pronostica el siguiente periodo. Para entender esto, se asume que se está en t . De acuerdo a este método, se emplean las observaciones hasta t para generar el pronóstico que corresponde a $t+1$. Una vez hecho esto, para generar el pronóstico $t+2$, se utilizan los datos hasta el periodo $t+1$ (no el valor pronosticado para $t+1$). Y se sigue este procedimiento hasta que se llega al último periodo a pronosticar.

Para determinar si un pronóstico es adecuado, se usan los estadísticos que se presentan a continuación. La idea de todos estos estadísticos es que comparan los valores reales con aquellos que han sido pronosticados. Ahora bien, como los errores pueden ser positivos o negativos, la simple suma de ellos no

sería de gran ayuda puesto que se cancelarían entre ellos. Es por eso que los índices trabajan ya sea con los errores al cuadrado o con el valor absoluto de los errores.

Normalmente se utilizan estos estadísticos como elementos de comparación con los pronósticos de otros modelos. Se sume que el mejor es aquel que tiene los estadísticos con los menores valores. Si se está en el periodo t y se desea hacer pronósticos r periodos adelante, se emplea alguno de los indicadores que se analizan a continuación:

Media de los errores al cuadrado (MSE)

MSE se define como:

$$MSE = \sum_{j=t+1}^{t+r} \frac{(y_j - \delta_{t,j})^2}{r}$$

donde y_j es el valor observado de los datos y $\delta_{t,j}$ que es el valor pronosticado. Por lo general se usa raíz del MSE a la que se le denomina como la raíz de la media de los errores al cuadro (RMSE por sus siglas en ingles).

$$RMSE = \sqrt{\sum_{j=t+1}^{t+r} \frac{(y_j - \delta_{t,j})^2}{r}}$$

Media absoluta de errores porcentuales (MAPE)

El MAPE representa el cambio porcentual de los errores, por lo que su valor se encontrará siempre entre $[0,1]$. Tomará el valor de 1 cuando el pronóstico provenga de un modelo de camino aleatorio, es decir, cuando el pronóstico $\delta_{t,j}$

sea igual a cero. Por lo tanto, si el MAPE es menor que 1, esto indicará que los pronósticos realizados son mejores que los efectuados con el modelos de camino aleatorio.

El MAPE tiene la siguiente ecuación:

$$MAPE = \frac{\sum_{j=t+1}^{t+r} \left| \frac{y_j - \delta_{t,j}}{\delta_{t,j}} \right|}{r} \times 100$$

Coefficiente de desigualdad de Theil

Este coeficiente mide las ganancias (en términos de pronósticos) de n modelo cualquiera con respecto a un modelo base, que usualmente es el modelo de caminos aleatorios. Si este coeficiente toma un valor menor (mayor) que 1, significará que el modelo que se está usando es mejor (peor) que otro.

Este modelo está definido por:

$$Theil = \sqrt{\frac{\sum_{j=t+1}^{t+r} \left(\frac{y_j - \delta_{t,j}}{y_j} \right)^2}{\sum_{j=t+1}^{t+r} \left(\frac{y_j - \delta_{t,j}^b}{y_j} \right)^2}}$$

III. MATERIALES Y MÉTODOS

3.1 Materiales

Para el desarrollo del presente trabajo se ha requerido el uso de materiales y equipos, detallados a continuación:

- Valor diario del Índice General de La bolsa de Valores de Lima, entre los años 2009 -2011, obtenido del portal web de la Bolsa de Valores de Lima.
- Una laptop marca TOSHIBA, con procesador Intel® Core™ i3-2310M CPU @2.1 GHZ, con sistema operativo Windows 7Home Premium 64 bits y con memoria RAM de 4GB.
- Programa de texto y de cálculo: Word y Excel respectivamente.
- Paquete de análisis estadístico: EVIEWS versión 7.
- Memoria USB marca HP, con capacidad de almacenamiento de 8GB.
- Una impresora multifuncional HP DESKJET 2050.
- Un millar de papel bond, tamaño A4.

3.2 Metodología de la Investigación

3.2.1 Tipo de Investigación

El proyecto que se realiza, es de carácter descriptivo, dado que solo se describe el comportamiento del valor diario del Índice General de la Bolsa de Valores de Lima, periodo 2009 – 2011, lo que permitirá comprender y tomar mejores decisiones a las empresas que operan en el mercado bursátil peruano.

3.2.2 Diseño de la Investigación

El proyecto es una investigación de tipo no experimental - transaccional debido a que no se tiene ninguna influencia en los datos obtenidos para el estudio y son tomados en un momento determinado.

3.2.3 Formulación de la Hipótesis

El valor diario del índice general de la bolsa de valores de Lima, durante el periodo 2009 - 2011 se ajusta a un modelo de varianza condicional GARCH, debido a que no cumple con el supuesto de homocedasticidad.

3.2.4 Descripción de Variable

Índice General de la Bolsa de Valores de Lima (IGBVL): es un indicador que permite establecer comparaciones respecto a los rendimientos alcanzados por los diversos sectores (industrial, bancario, agrario, minero, de servicios públicos, etc.) participantes en Bolsa, en un determinado tiempo. Se determina a partir de una cartera formada por las acciones más significativas de la negociación bursátil, seleccionados con base en su frecuencia de negociación, monto negociado y número de operaciones. Su cálculo considera las variaciones de precios y los

dividendos o acciones liberadas repartidas, así como la suscripción de acciones. Tiene como fecha base el 30 de diciembre de 1991 = 100.

3.2.5 Población y Muestra

La población en estudio es el conjunto de valores que toma el IGBVL durante un día, entre los años 2009 - 2011. La muestra es el valor diario del IGBVL que se obtuvo de los reportes emitidos diariamente por la Bolsa de Valores de Lima durante el periodo 2009 – 2011.

La información recabada del valor diario del IGBVL durante el periodo 2009 – 2011, en conjunto formará la serie de tiempo que se usará para realizar la parte aplicativa del presente trabajo.

3.2.6 Metodología Aplicada

Los procedimientos realizados para el análisis de los datos recabados, y por consiguiente el contrastar de la hipótesis planteada se detalla a continuación:

- Juntar en una sola data los distintos valores diarios del IGBVL, comprendidos entre los años 2009 – 2011.
- Calcular el rendimiento diario de la serie del IGBVL, posteriormente se procedió a obtener sus respectivas estadísticas descriptivas.
- Realizar el modelamiento del rendimiento del IGBVL, mediante el método de modelos de varianza condicional haciendo uso del software econométrico EVIEWS 7.
- Selección del modelo de varianza condicional al cual se ajusta mejor el rendimiento del IGBVL.
- Realizar el pronóstico de la volatilidad para los días de la última semana del mes de Diciembre del año 2011 y los días de la primera semana del mes de Enero del año 2012.

3.3 Modelo Autoregresivo Condicional Heterocedástico (ARCH)

Los modelos ARCH tienen su origen en un artículo de Engle (1982), en el que se pretendía obtener una predicción adecuada para la inflación en el Reino Unido, sujeta a fuerte volatilidad y con períodos de especial calma o de especial agitación. Los modelos ARCH satisfacen dos características básicas:

1. La serie y_t es serialmente incorrelacionada, pero dependiente.
2. La dependencia de y_t se describe mediante una función cuadrática de sus retardos.

El proceso ARCH (q) viene definido por la expresión:

$$y_t = \varepsilon_t h_t \quad (3.1)$$

$$h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{t-i}^2 \quad (3.2)$$

donde se dan las siguientes restricciones:

- “q” es el número de retardos de valores pasados “ y_t ” al cuadrado que se utilizarán para modelar la varianza condicional, h_t^2
- ε_t y h_t son dos procesos estacionarios independientes y y_t pueden ser las perturbaciones de un modelo ARMA.
- ε_t es un proceso idénticamente distribuido con media cero y desviación típica igual a uno, $\varepsilon_t \sim NID(0, 1)$.
- Los parámetros α_0 y α_i donde $i=1, \dots, q$ y, para cumplirse la condición de estacionariedad en media, la suma de todos los parámetros debe ser menor que la unidad.
- Si ε_t es gaussiano y se distribuye según una normal, y_t es condicionalmente normal y su varianza es h_t^2 .

A partir de estos supuestos se puede mostrar:

$$1. E(y_t) = 0 \quad (3.4)$$

$$2. V(y_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i} \quad (3.5)$$

3.3.1 Esperanza y Varianza No-Condicionales del proceso ARCH (1)

Sea:

$$y_t = \varepsilon_t h_t \text{ con } \varepsilon_t \sim NID(0,1) \text{ y } h_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2$$

el primer y segundo momento no-condicional, del proceso y_t , están dados por:

- Esperanza No-Condicionales

$$E(y_t) = E(\varepsilon_t h_t)$$

$$E(y_t) = E(\varepsilon_t) E(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2)^{1/2}$$

$$E(y_t) = 0 \text{ (puesto que } E(\varepsilon_t) = 0)$$

- Varianza No-Condicionales

$$V(y_t) = E(y_t^2)$$

$$V(y_t) = E(\varepsilon_t^2) E(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2)$$

$$V(y_t) = \alpha_0 + \alpha_1 E(y_{t-1}^2), \text{ (puesto que } E(\varepsilon_t^2) = 1)$$

esto se tiene para todo t . Tomando $E(y_{t-1}^2)$ en función de $E(y_{t-2}^2)$, se tiene:

$$E(y_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1(\alpha_0 + \alpha_1 E(y_{t-2}^2))$$

de forma análoga, regresando k-veces hacia el pasado y dado que $\alpha_1 < 1$ tenemos:

$$E(y_t^2) = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_0 \alpha_1^j + \alpha_1^k E(y_{t-k}^2)$$

llevando $k \rightarrow \infty$ la ecuación se convierte en

$$E(y_t^2) = \alpha_0 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_1^j$$

por lo tanto

$$E(y_t^2) = \alpha_0 / (1 - \alpha_1)$$

3.3.2 Esperanza y Varianza Condicional proceso ARCH (1)

A continuación se presenta el desarrollo de la esperanza y varianza condicional del proceso y_t . En adelante Ψ_{t-1} es igual a $\{y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}, \dots\}$ es decir, Ψ_{t-1} denota el conjunto información observada hasta el periodo t-1.

- Esperanza Condicional

$$E(y_t / \Psi_{t-1}) = E(\varepsilon_t / \Psi_{t-1}) (\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2)$$

$$E(y_t / \Psi_{t-1}) = E(\varepsilon_t) (\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2)$$

$$E(y_t / \Psi_{t-1}) = 0$$

- Varianza Condicional

$$V(y_t/\Psi_{t-1}) = E(\varepsilon_t^2/\Psi_{t-1})(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2)$$

$$V(y_t/\Psi_{t-1}) = E(\varepsilon_t^2)(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2)$$

$$V(y_t/\Psi_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2$$

de los resultados anteriores se resalta en ambos casos que:

- La media es constante en ambos casos, igual a cero.
- La varianza no-condicionada es constante (varianza de largo plazo).
- La varianza condicional a corto plazo depende de y_{t-1} . Por lo que dados los supuestos, el proceso puede presentar periodos de alta volatilidad o de calma, la varianza a corto plazo no es constante.

3.3.3 Generalización ARCH (q)

Los resultados presentados para un ARCH (1), se generalizan para un proceso ARCH (q), como se presenta a continuación. El resultado más importante es que un proceso ARCH es un ruido blanco pero no es independiente e idénticamente distribuido.

En los siguientes ítems se presenta una generalización de la esperanza y varianza no-condicional, anteriormente presentadas.

- Esperanza No-Condicional

$$E(y_t) = E(\varepsilon_t h_t)$$

$$E(y_t) = E(\varepsilon_t \left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{t-i}^2 \right)^{1/2})$$

$$E(y_t) = E(\varepsilon_t) E(\alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{t-i}^2)^{1/2}$$

$$E(y_t) = 0 \text{ (puesto que } E(\varepsilon_t) = 0)$$

- Varianza No-Condicional

$$V(y_t) = E(y_t^2)$$

$$V(y_t) = E((\varepsilon_t^2) \left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{t-i}^2 \right))$$

$$V(y_t) = E(\varepsilon_t^2) E(\alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{t-i}^2)$$

$$V(y_t) = E(\alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{t-i}^2)$$

$$V(y_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i E(y_{t-i}^2)$$

$$V(y_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (\alpha_0 + \sum_{k=1}^p \alpha_k E(y_{t-i-k}^2))$$

$$V(y_t) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^k \left(\sum_{k=1}^q \alpha_i \right)^j$$

$$V(y_t) = \alpha_0 / \left(1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i \right)$$

en los siguientes ítems se presentara una generalización de la esperanza y varianza condicional, de nuevo Ψ_{t-1} es igual a $\{y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}, \dots\}$

- Esperanza Condicional

$$E(y_t/\Psi_{t-1}) = E(\varepsilon_t/\Psi_{t-1}) \left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{t-i}^2 \right) = 0$$

- Varianza Condicional

$$V(y_t/\Psi_{t-1}) = E(\varepsilon_t^2/\Psi_{t-1}) \left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{t-i}^2 \right)$$

$$V(y_t/\Psi_{t-1}) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{t-i}^2 = h_t$$

las conclusiones para un modelo ARCH (q) son:

- Un ARCH (q) es un proceso de ruido blanco pero no es independiente e idénticamente distribuido.
- Las esperanzas condicional y no-condicional son iguales a cero.
- La varianza no-condicional es constante; mientras que la varianza condicional depende de $y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}, \dots, y_{t-p}$, luego no es fija.

3.3.4 Estimación de un ARCH (q)

En la definición hecha de los procesos de heterocedasticidad condicional autoregresiva se hace el supuesto inicial de que la perturbación aleatoria del modelo propuesto se distribuye según una normal. Engle (1982) propone la estimación de los parámetros a partir de la maximización del logaritmo de la función de densidad de la normal. La única particularidad del método propuesto, parte de la consideración de la esperanza condicional para la simplificación de los momentos de primero y segundo orden que en ella se obtienen. Obviamente, tal y

como viene asumiendo este tipo de modelos, podemos considerar el conjunto información del periodo “t-1” conocida en el periodo “t”.

En el desarrollo matemático-estadístico que se estudia, tanto para el caso del ARCH (q) como para el modelo de regresión con estructura ARCH, se procede del siguiente modo:

- A partir de la función de densidad de la normal, se explicitan los momentos de primer y segundo orden.
- Se obtiene la matriz de información del suceso conjunto como la media de las esperanzas condicionales de la matriz de momentos de segundo orden (hessiano).
- Se expone el procedimiento de estimación iterativa de los parámetros de los modelos a partir del algoritmo de “scoring”, empleando entonces la matriz de información como sustituta o simplificación del hessiano.
- Se aplica el procedimiento iterativo resultante de la maximización de la expresión del polinomio de Taylor de segundo grado como aproximación de cálculo del valor mínimo de la función verosímil en un punto.

Pasamos ahora a realizar estos pasos de modo detallado.

Sea y_t un proceso definido por un ARCH (q) del modelo presentado en la ecuación 3.1 y 3.2 respectivamente:

$$y_t = \varepsilon_t h_t$$
$$h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{t-i}^2$$

Donde la media de y_t es cero y todas sus covarianzas nulas. Además sus observaciones se distribuyen como una normal, dado que es una combinación lineal de una perturbación aleatoria que así se distribuye. Por ello, su distribución conjunta es el producto de las densidades de cada uno de sus elementos, con lo

que el logaritmo de esta función será la suma de todas las funciones de densidad para una muestra de T observaciones, puede escribirse como:

$$L = \sum_{t=1}^T l_t \quad (3.6)$$

el logaritmo de verosimilitud de la normal correspondiente al proceso ARCH (q) antes descrito (al margen de las constantes) sería:

$$L = \sum_{t=1}^T -\frac{1}{2} \log h_t^2 - \frac{1}{2} \frac{y_t^2}{h_t^2} \quad (3.7)$$

la determinación de los parámetros del modelo anterior $\alpha_i \forall i = 1, 2, 3 \dots, q$ a los que generalizaremos como q, se pueden estimar a partir de la maximización de esta función, siendo las condiciones de primero y segundo orden las siguientes:

$$\frac{\partial l_t}{\partial \alpha} = \frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t^2}{\partial \alpha} \left(\frac{y_t^2}{h_t^2} - 1 \right) \quad (3.8)$$

y el hessiano

$$\frac{\partial^2 l_t}{\partial \alpha \partial \alpha'} = \frac{1}{2(h_t^2)^2} \frac{\partial h_t^2}{\partial \alpha} \frac{\partial h_t^2}{\partial \alpha'} \left(\frac{y_t^2}{h_t^2} \right) + \left(\frac{y_t^2}{h_t^2} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial \alpha'} \left(\frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t^2}{\partial \alpha} \right) \quad (3.9)$$

en la expresión anterior, se pueden simplificar algunos valores teniendo en cuenta el resultado de la esperanza condicional de uno de sus términos:

$$E_{t-1} \left(\frac{y_t^2}{h_t^2} \right) = \frac{1}{h_t^2} E_{t-1}(y_t^2) = \frac{h_t^2}{h_t^2} = 1$$

esto es posible ya que se ha demostrado que la media del proceso y_t era nula, que el valor de y_{t-1} es conocido en el momento t y que:

$$h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{t-i}^2$$

con lo que la esperanza condicional de la varianza $E_{t-1}(h_t)$ es una constante conocida.

Con todo ello, la expresión del hessiano antes escrito quedaría reducida a:

$$\frac{\partial^2 l_t}{\partial \alpha \partial \alpha'} = \frac{1}{2(h_t^2)^2} \frac{\partial h_t^2}{\partial \alpha} \frac{\partial h_t^2}{\partial \alpha'} \quad (3.10)$$

y la matriz de información, es decir la media del hessiano para las T observaciones totales (supuesta dependencia entre los valores sucesivos del proceso y_t), sería:

$$\vartheta_{\alpha\alpha} = \sum_t \frac{1}{2} E \left[\frac{1}{(h_t^2)^2} \frac{\partial h_t^2}{\partial \alpha} \frac{\partial h_t^2}{\partial \alpha'} \right] \quad (3.11)$$

esta matriz de información se puede estimar de forma consistente como:

$$\vartheta_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2T} \sum_t \left[\frac{1}{(h_t^2)^2} \frac{\partial h_t^2}{\partial \alpha} \frac{\partial h_t^2}{\partial \alpha'} \right] \quad (3.12)$$

Engle (1982) propone escribir estas funciones de una forma más sencilla a partir de la siguiente simplificación:

Siendo $z_t' = (1, y_{t-1}^2, y_{t-2}^2, \dots, y_{t-q}^2)$ y $\alpha' = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q)$ la ecuación de la varianza se puede escribir como:

$$h_t^2 = z_t' \alpha$$

Entonces $\frac{\partial h_t^2}{\partial \alpha} = z_t$ y a partir de la ecuación (3.8) se tiene que la gradiente es:

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \sum_t \frac{\partial l}{\partial \alpha} = \sum_t \frac{1}{2h_t^2} z_t \left(\frac{y_t^2}{h_t^2} - 1 \right) \quad (3.13)$$

mientras que la expresión de la ecuación (3.9), la estimación de la matriz información puede escribirse como:

$$\vartheta_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2} \sum_t (z_t' z_t / (h_t^2)^2) \quad (3.14)$$

para obtener el valor estimado de la matriz de parámetros del modelo, Engle (1982) propone utilizar el algoritmo iterativo del tipo "scoring". Este algoritmo es:

$$\hat{\alpha}_{t+1} = \hat{\alpha}_t + (\vartheta_{\alpha\alpha} | \hat{\alpha}_t)^{-1} \left(\frac{\partial l}{\partial \alpha} \Big| \hat{\alpha}_t \right)$$

donde $\hat{\theta}_{t+1}$ y $\hat{\theta}_t$ denotan las estimaciones numéricas del vector θ en dos iteraciones sucesivas.

A partir de las expresiones (3.13) y (3.14), el algoritmo iterativo de estimación queda de este modo:

$$\hat{\alpha}_{t+1} = \hat{\alpha}_t + (\hat{z}' \hat{z})^{-1} \hat{z}' w$$

$$\tilde{z}'_t = (1, y_{t-1}^2, y_{t-2}^2, \dots, y_{t-q}^2) / h_t^2$$

$$\tilde{Z}' = (\tilde{z}'_1, \tilde{z}'_2, \dots, \tilde{z}'_T) \text{ Matriz de } (q+1) \times T$$

$$w_t = \left(\frac{y_t^2}{h_t^2} - 1 \right)$$

$$W' = (w_1, w_2, \dots, w_T) \text{ ,vector fila de } 1 \times T$$

por lo que la variación a introducir en la estimación del vector θ en cada etapa del proceso iterativo, viene dada por los coeficientes MCO en una regresión de la variable w_t sobre el vector $(q+1)$ -dimensional \tilde{z}'_t para $t=q+1, \dots, T$, donde y_t^2 es conocido en el período muestral y el valor numérico de h_t^2 en cada iteración se obtiene con los parámetros estimados en la iteración previa.

La matriz de covarianzas del estimador MV del vector α se estima consistentemente a partir de la inversa de la matriz de información en (3.14). Dicha matriz de covarianzas no es, en nuestra notación, sino $2(\tilde{Z}'\tilde{Z})^{-1}$. La utilización del factor 2, en lugar de la habitual estimación de la varianza condicional del proceso, es asintóticamente válida, ya que:

$$\frac{y_t^2}{\sqrt{h_t^2}} \sim (0,1), \text{ por lo que } \frac{y_t^2}{h_t^2} \sim X_t^2 \text{ y } \text{var} \left(\frac{y_t^2}{h_t^2} \right) = 2$$

en el proceso de estimación, se utiliza generalmente como criterio de convergencia el estadístico G:

$$G = \frac{\partial L}{\partial \alpha'} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha \partial \alpha'} \right)^{-1} \frac{\partial L}{\partial \alpha}$$

que se distribuye X_q^2 . Puede probarse que este estadístico coincide con el R^2 de la última regresión efectuada en el algoritmo descrito. Si dicho estadístico toma un

valor superior al de las tablas, se interpreta que el cambio en la estimación es grande, y se continúa iterando.

En caso contrario, se detiene el proceso de estimación, conservando el último valor obtenido.

3.3.5 Modelo ARCH (q) de Regresión

Hasta el momento, se había considerado y_t como un proceso estocástico sólo vinculado a la evolución de su varianza condicional y de un ruido blanco. La extensión lógica no puede ser otra que realizar una especificación de y_t en función de más variables explicativas y aplicar el modelo de heterocedasticidad condicional a la especificación de la varianza del proceso. Es decir, aplicar el modelo ARCH a un proceso con media no nula.

La especificación en este caso es la siguiente:

$$\begin{aligned}y_t/\psi_{t-1} &\rightarrow N(x_t\beta, h_t^2) \\ \varepsilon_t &= y_t - x_t\beta \\ h_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad (3.15)\end{aligned}$$

en este modelo, las variables explicativas x_t pueden incluir a la endógena desplazada y la varianza de y_t se modela en función de los valores al cuadrado del término aleatorio.

Para estimar los parámetros de este modelo propuesto por Engle (1982), se puede maximizar el logaritmo de verosimilitud que no sería otro que el de una normal.

Los MCO pueden emplearse como estimadores insesgados y consistentes de los parámetros β , dado que la definición matemática anterior no incluye dependencia entre la matriz de x_t y la perturbación aleatoria ε_t . Ambos están incorrelacionados gracias a la definición dada de las esperanzas condicionales. Sólo en el caso en que las explicativas incluyeran valores de la endógena desplazada, los estimadores MCO serían inconsistentes, ya que el cuadrado de x_t estaría correlacionado con el cuadrado del error calculado. En cualquier otro caso, los MCO serían insesgados y consistentes, pero no eficientes. Para lograr los estimadores óptimos habría que recurrir a la estimación máximo-verosímil.

Los estimadores máximo-verosímiles se obtienen a partir de la maximización del logaritmo de la función de densidad de la normal, obteniéndose, como condición de primer orden, la siguiente expresión para su cálculo:

$$l_t = -\frac{1}{2} \log(h_t^2) - \frac{1}{2} \varepsilon_t^2 / h_t^2$$

$$l = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T l_t$$

$$\frac{\partial l}{\partial \beta} = \frac{x_t \varepsilon_t'}{h_t^2} + \frac{1}{2h_t} \frac{\partial h_t^2}{\partial \beta} \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2} - 1 \right)$$

el primer sumando de la expresión anterior es la corrección clásica de heterocedasticidad y el segundo es el resultado de que la varianza también dependa de los parámetros β .

En el caso de un ARCH (1), el resultado de la derivada parcial de la varianza respecto a los parámetros es el siguiente:

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{\partial \varepsilon_{t-1}^2}{\partial \beta} = -2\varepsilon_{t-1}x_{t-1}$$

se tiene que :

$$\frac{\partial h_t^2}{\partial \beta} = 2(\alpha_1 x_{t-1}^2 \beta - \alpha_1 y_{t-1} x_{t-1}) = -2\alpha_1 \varepsilon_{t-1} x_{t-1} \quad (3.16)$$

generalizando la expresión para un ARCH (q) y sustituyéndola en la Ec. 3.16, obtenemos un resultado simplificado de la condición de primer orden:

$$\frac{\partial l_t}{\partial \beta} = \sum \left[\frac{\varepsilon_t x'_t}{h_t^2} + \frac{1}{h_t^2} \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2} - 1 \right) \sum_j^q \alpha_j \varepsilon_{t-j} x'_{t-j} \right] = \sum \varepsilon_t x'_t \left[h_t^{2^{-1}} - \sum_j^q \alpha_j (\varepsilon_{t-j} - h_{t+j}) \right]$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \beta \partial \beta'} = -\frac{x'_t x_t}{h_t^2} - \frac{1}{2(h_t^2)^2} \frac{\partial h_t^2}{\partial \beta} \frac{\partial h_t^2}{\partial \beta'} \frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2} - 2 \frac{\varepsilon_t x'_t}{(h_t^2)^2} \frac{\partial h_t^2}{\partial \beta} + \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial \beta'} \left[\frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t^2}{\partial \beta} \right]$$

en el hessiano, tomando esperanzas condicionales, la derivada de la varianza h_t respecto a los parámetros es nula, ya que esta depende de términos del pasado perfectamente conocidos. Por otro lado, el cociente del residuo al cuadrado sobre la varianza se hace igual a uno.

Dado que el proceso ARCH supone dependencia entre las distribuciones de probabilidad del proceso en sucesivos momentos del tiempo, debe definirse la matriz de información por el valor esperado de las esperanzas de la varianza condicional, lo que, en este caso, resultaría:

$$\zeta_{\beta\beta} = - \sum_t E \left(\frac{\partial^2 l}{\partial \beta \partial \beta'} / \psi_{t-1} \right) = \sum_t E \left[\frac{x'_t x_t}{h_t^2} + \frac{1}{2(h_t^2)^2} \frac{\partial h_t^2}{\partial \beta} \frac{\partial h_t^2}{\partial \beta'} \right]$$

esta matriz de información se puede estimar consistentemente como:

$$\hat{\zeta}_{\beta\beta} = \sum_t \left[\frac{x'_t x_t}{h_t^2} + 2 \sum \alpha_j^2 \frac{\varepsilon_{t-j}^{-2}}{(h_t^2)^2} x'_{t-j} x_{t-j} \right]$$

en su artículo pionero, Engle (1982) demuestra que, si el proceso ARCH (q) es simétrico, la estimación independiente de los parámetros del modelo y de su estructura ARCH es asintóticamente eficiente ya que la diagonal de la matriz de información de los parámetros es nula ($\zeta_{\alpha\beta} = 0$), proponiéndose los siguientes pasos para la estimación:

Estimar la matriz de parámetros β por MCO:

$$\hat{\beta}^{MCO} = [x'_t x_t]^{-1} x'_t y_t$$

Utilizar los valores del error obtenidos como estimaciones de ε_t :

$$\hat{\varepsilon}_t = y_t - x_t \hat{\beta}$$

con los valores del error al cuadrado, determinar los valores de los parámetros a partir del algoritmo iterativo de “scoring” de Máxima verosimilitud.

$$\hat{\alpha}^{i+1} = \hat{\alpha}^i + [\hat{\zeta}_{\alpha\alpha}^i]^{-1} \frac{1}{T} \sum_t \frac{\partial l_t^i}{\partial \alpha}$$

para el ARCH (q), la expresión anterior se resume en:

$$\hat{\alpha}^{i+1} = \hat{\alpha}^i + (\tilde{z}'_t \tilde{z}_t)^{-1} \tilde{z}'_t f^i$$

$$\tilde{z}_t = (1, \hat{\varepsilon}_{t-1}^2, \hat{\varepsilon}_{t-2}^2, \dots, \hat{\varepsilon}_{t-q}^2) / h_t^i$$

$$\tilde{z}'_t = (1, \tilde{z}'_1, \tilde{z}'_2, \dots, \tilde{z}'_T)$$

$$f_t^i = (\hat{\varepsilon}_{t-2}^2 - h_t^i) / h_t^i$$

$$f^i = (f_1^i, f_2^i, \dots, f_T^i)$$

en donde $\hat{\varepsilon}_t$ es el residuo de la iteración, h_t^i es la varianza condicional estimada y α^i es el vector de parámetros desconocidos, todos ellos en la iteración "i".

El criterio de convergencia se puede fijar, según Belsley (1977) y adaptado al modelo que estamos contemplando, en:

$$R^2 = \frac{\partial l'}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial l'}{\partial \alpha \partial \alpha'} \right)^{-1} \frac{\partial l}{\partial \alpha}$$

Tal que R^2 es el coeficiente de correlación cuadrado de la regresión auxiliar.

Reproducir todo el proceso cuando se haya obtenido un valor de la fase (3) hasta el valor de convergencia señalado.

Los valores de las nuevas α estimadas a partir de la información de la matriz de varianzas-covarianzas correctamente calculada en la fase (3) se podrían aproximar nuevamente con un "scoring" del siguiente modo:

$$\hat{\alpha}^{i+1} = \hat{\alpha}^i + [\hat{\zeta}_{\alpha\alpha}^i]^{-1} \frac{\partial l_i}{\partial \alpha}$$

donde se puede emplear como matriz de información estimada la proveniente de la ecuación antes deducida.

3.3.6 Condición de Estacionariedad de un ARCH (q)

El objetivo de este epígrafe será demostrar cuál es la condición necesaria para que la varianza del proceso ARCH (1) tenga un límite finito; es decir, sea calculable para un número amplio de retardos. Aplicando las condiciones al caso concreto del proceso ARCH (1), se persiguen dos objetivos: por un lado, ilustrar mejor las demostraciones matemáticas y, por otro, concretar esta condición para el proceso más habitualmente utilizado.

Si el proceso y_t^2 tiene media nula, varianza h_t^2 y se distribuye como una normal, a partir del desarrollo polinómico de Taylor podremos escribir el momento de orden “m” según la siguiente expresión:

$$E\left(\frac{y_t^{2m}}{\Psi_{t-1}}\right) = h_t^{2m} \prod_{j=1}^m (2j-1) = (\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2)^m \prod_{j=1}^m (2j-1) \quad (3.17)$$

la parte anterior al productorio, se podría escribir matricialmente para, por ejemplo, m=3,2 y 1 sucesivamente, como:

$$\begin{bmatrix} (h_t^2)^3 \\ (h_t^2)^2 \\ (h_t^2)^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & 2\alpha_0\alpha_1^2 & \alpha_0^2\alpha_1 \\ 0 & \alpha_1^2 & 2\alpha_0 \\ 0 & 0 & \alpha_1^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1}^6 \\ y_{t-1}^4 \\ y_{t-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_0^3 \\ \alpha_0^2 \\ \alpha_0^1 \end{bmatrix}$$

si escribimos el vector $z_t' = (y_t^{2m}, y_t^{2(m-1)}, \dots, y_t^2)$, podríamos resumir la expresión matricial anterior y su esperanza (de z_t condicionada a la información disponible en sobre “t-1”) según la siguiente expresión:

$$E_{t-1}(z_t) = E\left(\frac{z_t}{\Psi_{t-1}}\right) = b + Az_{t-1} \quad (3.18)$$

donde “b” es un vector columna de “m” filas y “A” es una matriz triangular superior “m’ m”. Obviamente, el número de valores diferentes de la matriz A es “m + (m’ mm)/2”, con lo cual la expresión es sólo válida para potencias de “yt “menores o iguales al resultado de esa operación.

Dado que el proceso ARCH (1) es muy frecuente, se escriben sus dos primeros momentos siguiendo el sistema propuesto por Engle. Así, los las dos expresiones, según la Ec. 3.16 serían las siguientes:

$$E((y_t^2)^2/\Psi_{t-1}) = (\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2)^2 3 = 3\alpha_0^2 + 3\alpha_1^2 y_{t-1}^2 + 6\alpha_0 \alpha_1 y_{t-1}^2$$

$$E(y_t^2/\Psi_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2$$

si describimos la matriz w_t como aquel vector columna que recoge los momentos al cuadrado de los valores del proceso ya al cuadrado (por ejemplo, $E(w_t) = E(z_t)^2 = E((y_t^2)^2)$). Es decir, si incluimos en dicha matriz los momentos de primer y segundo orden del proceso cuadrado que centra las discusiones sobre los modelos ARCH que estamos reproduciendo, podríamos escribir matricialmente:

$$w_t = (y_t^4, y_t^2)$$

$$E\left(\frac{w_t}{\Psi_{t-1}}\right) = b + Aw_{t-1} = \begin{pmatrix} 3\alpha_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\alpha_1^2 & 6\alpha_0 \alpha_1 \\ 0 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{t-1}^2 \\ w_{t-1} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

por sustitución sucesiva y, teniendo en cuenta que $w_t = z_t^2$, la expresión anterior podría escribirse, para la información disponible en z_{t-k+1} , es decir z_{t-k} , del siguiente modo:

$$E_{t-1}(z_t) = E\left(\frac{z_t}{\Psi_{t-1}}\right) = b + Az_{t-1} = b + A(b + Az_{t-2})$$

$$E_{t-1}(z_t) = (I_m + A^1 + A^2 + \dots + A^{K-1})b + A^K z_{t-k}$$

dada la progresión geométrica resultante, es fácil comprobar que esta serie sólo tenderá hacia un número finito en la medida en que todos los autovalores de la matriz A estén dentro del círculo unitario, ya que de otro modo las potencias de sus elementos serían una progresión explosiva (tenderían a infinito). El límite de la expresión anterior cuando “k” tiende a infinito se puede escribir como:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E\left(\frac{z_t}{\Psi_{t-1}}\right) = (I - A)^{-1}b$$

límite en cuya definición no entra la observación a la que nos estemos refiriendo (t), luego tendrá el mismo valor para la varianza marginal (incondicional).

Para el caso del ARCH (1), tomando la matriz A que se obtuvo en la Ec. 3.18, la expresión anterior sería:

$$E(w_t) = \begin{bmatrix} \frac{3\alpha_0^2}{(1-\alpha_1)^2} & \frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2} \\ \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} & \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

por otra parte, dado que la matriz A es triangular superior, los autovalores coinciden con los elementos de su diagonal principal; y, tal como se ha dicho, es condición necesaria y suficiente de estacionariedad del ARCH el que dichos autovalores estén comprendidos dentro del círculo unitario. Teniendo en cuenta como se definieron los momentos condicionales de una normal (Ec. 3.18), los elementos de la diagonal principal de la matriz A serán:

$$\alpha_1^m \prod_{j=1}^m (2j - 1) = \prod_{j=1}^m \alpha_1 (2j - 1) = \theta_m \quad (3.21)$$

donde θ_m es el resultado de un producto de factores monotónicamente crecientes. En definitiva, este valor sólo convergerá hacia un número en la medida en que α_1 , en valor absoluto, sea menor que uno para el caso del ARCH(1).

Este proceso es generalizable para un ARCH (q). En este caso, se podría decir que dicho proceso, con $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q \geq 0$, es estacionario en covarianza si, y sólo si, todas las raíces asociadas a su función característica están dentro del círculo unitario, lo que es igual que decir que todos los autovalores de la matriz A (3.17) que resultaría de escribir el sistema para “q+1” parámetros estuvieran dentro del círculo unitario. Para un ARCH (q), la varianza estacionaria del proceso vendrá dada por la expresión:

$$\frac{\alpha_0}{1 - \sum_j^q \alpha_j}$$

de la ecuación Ec.3.19 se puede inferir que, dado que la varianza marginal del proceso ARCH (1) es $var(y_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$, que este proceso tiene unas colas de distribución más de tres veces superiores a las de la normal. Desde la Ecuación Ec. 3.20 el momento de orden cuatro se pueden escribir:

$$(E(y_t^2))^2 = \frac{3var(y_t^2)}{1 - 3\alpha_t^2}$$

3.3.7 Predicción con modelos ARCH (q)

Partiendo de un modelo autorregresivo de orden uno, AR(1) sobre un proceso y_t estacionario escrito como:

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.22)$$

$$\varepsilon_t \sim N(0; \sigma_\varepsilon^2)$$

se puede escribir el valor para el período extramuestral “t+s” y calcularse, posteriormente, los primeros momentos marginales y condicionales como sigue:

$$\begin{aligned} y_{t+s} &= \phi y_{t+s-1} + \varepsilon_{t+s} = \phi(\phi y_{t+s-2} + \varepsilon_{t+s-1}) + \varepsilon_{t+s} \\ &= \phi^s y_t + \sum_{i=0}^{s-1} \phi^{s-i} \varepsilon_{t+s-i} \end{aligned}$$

- Esperanza No-Condional

$$E(y_{t+s}) = E(\phi y_{t+s-1} + \varepsilon_{t+s}) = 0$$

- Varianza No-Condional

$$\begin{aligned} E(y_{t+s} - E(y_{t+s}))^2 &= E(\phi y_{t+s-1} + \varepsilon_{t+s})^2 \\ &= \phi^2 E(y_{t+s-1})^2 + E(\varepsilon_{t+s})^2 = \sigma_\varepsilon^2 (1 - \phi^2)^{-1} \end{aligned}$$

- Esperanza Condional

$$\begin{aligned} E_t(y_{t+s}) &= \phi^s E_t(y_t) + \sum_{i=0}^{s-1} \phi^{s-i} E_t(\varepsilon_{t+s-i}) \\ &= \phi^s y_t \end{aligned}$$

- Varianza Condicional

$$\begin{aligned}
 E_t(y_{t+s} - E_t(y_{t+s}))^2 &= E_t\left(\phi^s y_t + \sum_{i=0}^s \phi^{s-i} \varepsilon_{t+s-i} - \phi^s y_t\right)^2 \\
 &= \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^s \phi^{s-i}
 \end{aligned}$$

Nótese que, en la expresión del valor de predicción para el período “t+s” utilizada anteriormente se tiene:

$$y_{t+s} = \phi^s y_t + \sum_{i=0}^s \phi^i \varepsilon_{t+s-i}$$

donde:

y_{t+s} : Predicción

$\phi^s y_t$: Esperanza condicional

$\sum_{i=0}^s \phi^i \varepsilon_{t+s-i}$: Error de predicción

Con esta formulación, los valores de predicción dependen del horizonte temporal elegido (s), pero no la información disponible hasta el período actual “t” de la muestra histórica.

De la forma en la que ya ha sido comentado en secciones anteriores, en un proceso ARCH (1) describimos la varianza condicional de la perturbación aleatoria también como un proceso autorregresivo:

$$\begin{aligned}
 y_t &= \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \\
 \varepsilon_t &\rightarrow N(0; \alpha_0(1 - \alpha_1^2)^{-1}) \quad (3.23) \\
 E_{t-1}(\varepsilon_t) &= 0
 \end{aligned}$$

$$V_{t-1}(\varepsilon_t) = h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

donde la perturbación aleatoria está incorrelacionada serialmente, aunque existe dependencia en sus segundos momentos.

La varianza marginal de la perturbación seguiría siendo la misma que para un AR (1):

$$Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 = \alpha_0(1 - \alpha_1)^{-1} \quad (3.24)$$

donde, para poder comparar entre las varianzas condicional y marginal, se puede despejar el término independiente como $\sigma_\varepsilon^2(1 - \alpha_1) = \alpha_0$ y sustituirlo en la Ec. 3.23, de lo cual resultaría:

$$\begin{aligned} h_t &= \sigma_\varepsilon^2(1 - \alpha_1) + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \\ h_t - \sigma_\varepsilon^2 &= \alpha_1(\varepsilon_{t-1}^2 - \sigma_\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (3.25)$$

de la Ec. 3.25 se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- La varianza condicional será superior a la marginal en la medida en que el cuadrado de la perturbación en el período previo así lo sea.
- Si la perturbación se distribuye como una normal, el cuarto momento marginal $(E(\varepsilon_t^2))^2$ será $3\alpha_1^4$ veces mayor que el momento marginal del mismo orden, mostrando entonces el proceso una cola de distribución mucho más larga (es leptocúrtico).

De cara a obtener el valor de predicción en el caso planteado en la Ec. 3.23, nuevamente podemos escribir los dos primeros momentos condicionales como:

$$E_t(y_{t+1}) = \phi y_t \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} Var_t(y_{t+1}) &= E_t(\phi y_t + \varepsilon_{t+1} - \phi y_t)^2 = E_t(\varepsilon_{t+1})^2 = h_{t+1} \\ &= \alpha_0 + \alpha_1(y_t + \phi y_{t-1})^2 \quad (3.27) \end{aligned}$$

ahora, tanto la esperanza como la varianza dependen del conjunto de información disponible en el momento “t”. De hecho, la varianza condicional es tanto mayor cuanto mayor sea el valor de la perturbación en el momento anterior ya conocida $E_t(\varepsilon_{t+1})^2$ en “t+1”.

Esta situación se puede generalizar para el valor de predicción en “t+s” a partir de sustituciones sucesivas:

$$Var_t(y_{t+s}) = \sum_{i=1}^s \phi^{2(s-i)} E(h_{t+s}) \quad (3.28)$$

uniendo al resultado de la Ec. 3.24 la ley de expectativas iteradas, podemos escribir:

$$E(h_{t+i}) = \sigma_\varepsilon^2 + \alpha_1 E(h_{t+i-1} - \sigma_\varepsilon^2) \quad (3.29)$$

luego la varianza condicional para el período “t+s” de la Ec. 3.27 se puede escribir como:

$$Var_t(y_{t+s}) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{s-1} \phi^{2i} + \alpha_1^{s-1} (h_{t+1} - \sigma_\varepsilon^2) \sum_{i=0}^{s-1} \phi^{2i-1} + \alpha_1^{-i} \quad (3.30)$$

como resultado de esta demostración se pueden concluir dos evidencias matemáticas:

- En el modelo ARCH (q) las predicciones de la varianza sí están sujetas a los valores ya existentes sobre información del pasado. Esto es obvio a partir del segundo sumando de la Ec. 3.29, en el cual está presente la varianza h_{t+1} , que viene, a su vez y según la estructura ARCH, definida por el valor de h_t modificado por α_1 .
- Las predicciones a largo plazo darán lugar a una varianza de predicción tanto más parecida a la del modelo autorregresivo AR (1) cuanto menor sea el valor del parámetro del ARCH (1) expuesto; es decir, cuanto más pequeño sea α_1 y a más a largo plazo sea la predicción, la expresión de la Ec. 3.29 más parecida será a la varianza condicional recogida, ya que el segundo sumando tendería a eliminarse.

De cara a la predicción con modelos ARCH, habrá que calcular los intervalos de predicción correctamente. Con este fin, podemos obtener el error cuadrático medio de predicción para cualquier momento, por ejemplo t+2, con el siguiente procedimiento:

$$\begin{aligned}
 ECM(\hat{y}_{T+2}) &= E_T(\hat{y}_{T+2} - y_{T+2})^2 = E_T(y_{T+2})^2 = E_T(E_{T+1}(y_{T+2}^2)) \\
 &= \omega + \alpha_2 y_T + \dots + \alpha_q y_{T+1-q} + \alpha_1 E_T(y_{T+1}^2) \\
 &= \omega(1 + \alpha_1) + (\alpha_1^2 + \alpha_2) y_T^2 + (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3) y_{T-1}^2 + \dots + \alpha_1 \alpha_q y_{T+2-q}^2 + \alpha_q y_{T+1-q}^2
 \end{aligned}$$

3.4 Modelo de Heterocedasticidad Condicional Autoregresivo Generalizado (GARCH)

GARCH es la abreviatura de *Generalized Autorregresive Conditional Heteroscedasticity* y da nombre a la ampliación del modelo ARCH ya comentado que realizó Bollerslev (1986) para los órdenes (p,q), y Taylor (1986), para el caso específico de los órdenes (1,1).

El modelo ARCH (q) que antes se presentaba, puede mostrar ciertas dificultades de estimación cuando se aplica a estructuras dinámicas en los

cuadrados de las series. Por ejemplo, en las series financieras, el número de retardos a utilizar es muy elevado y ello llevaría a un engorroso número de iteraciones para alcanzar una solución al sistema planteado, pudiendo darse el caso de no encontrar nunca una solución. Por ello, el mismo Engle (1983) propuso ciertas restricciones a los parámetros del ARCH (1) que simplificaban su estimación; pero estas no eran un proceso generalizable, por lo que la aportación de Bollerslev(1986) es decisiva a la hora de poder dotar de utilidad al modelo presentado por Engle. Como se verá con más detalle posteriormente, el modelo GARCH es al modelo ARMA igual que el ARCH al AR y, siempre y cuando las condiciones de estacionariedad lo permitan, ambos son susceptibles de escribirse como procesos de medias móviles de orden infinito. Por ello, se podría pensar en el modelo GARCH como un ARCH de orden infinito.

El modelo GARCH (p, q) se podría escribir como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \eta_t h_t^2 \\ \varepsilon_t / \psi_{t-1} &\rightarrow N(0, h_t) \\ h_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}^2 \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

con lo cual, el modelo ARCH (q) anterior no sería más que un caso concreto de este (aquél en el que todos los parámetros α_i son igual a cero).

Definidos:

$$A = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_q]$$

$$B = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_p]$$

$$\alpha_i(L)\varepsilon_t^2 = \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

la escritura de la ecuación del modelo para la varianza en función del polinomio de retardos sería:

$$h_t = \alpha_0 + A(L)\varepsilon_t^2 + B(L)h_t \quad (3.4.2)$$

El modelo GARCH (1,1) tiene las siguientes características:

- η_t es proceso estocástico estacionario idénticamente distribuido con media cero y desviación típica igual a uno.
- Los parámetros $\alpha_0 \geq 0$ y $\alpha_i, \beta_i \geq 0$ e $i=1\dots q$, y $j=1\dots p$. Además, para cumplirse la condición de estacionariedad en media, la suma de todos los parámetros es menor que la unidad, (como se demostrará posteriormente).
- La función de distribución marginal no es conocida, pero se pueden calcular los primeros momentos y definir el proceso respecto a su media y a su varianza.

Siguiendo con los resultados presentados por Bollerslev (1986), se presenta los desarrollos de la esperanza y varianza en el caso GARCH (1,1).

3.4.1 Esperanza y Varianza No-Condional proceso GARCH (1,1)

- Esperanza No-Condional

$$\varepsilon_t = \eta_t(\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1h_{t-1}^2)^{1/2}$$

$$E(\varepsilon_t) = E(\eta_t(\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1h_{t-1}^2)^{1/2})$$

$$E(\varepsilon_t) = E\left(\eta_t E\left((\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1h_{t-1}^2)^{1/2}\right)\right) = 0$$

- Varianza No-Condional

$$E(\varepsilon_t^2) = E(h_t)$$

$$E(\varepsilon_t^2) = E(\eta_t^2(\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1h_{t-1}^2))$$

$$E(\varepsilon_t^2) = E(\eta_t^2)E(\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1h_{t-1}^2)$$

$$E(\varepsilon_t^2) = E(\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1h_{t-1}^2)$$

$$E(\varepsilon_t^2) = E(\alpha_0 + \alpha_1E(\varepsilon_{t-1}^2) + \beta_1E(h_{t-1}^2))$$

$$E(\varepsilon_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1}$$

3.4.2 Esperanza y Varianza Condicional proceso GARCH (1,1)

- Esperanza Condicional

$$\varepsilon_t/\psi_{t-1} = \eta_t(\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1h_{t-1}^2)^{1/2}$$

$$E_{t-1}(\varepsilon_t) = E(\eta_t(\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1h_{t-1}^2)^{1/2})$$

$$E_{t-1}(\varepsilon_t) = E\left(\eta_t E\left((\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1h_{t-1}^2)^{1/2}\right)\right) = 0$$

- Varianza Condicional

$$E_{t-1}(\varepsilon_t^2) = E_{t-1}(\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1h_{t-1}^2)$$

$$E_{t-1}(\varepsilon_t^2) = E_{t-1}(\eta_t^2)E_{t-1}(\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1h_{t-1}^2)$$

$$E_{t-1}(\varepsilon_t^2) = h_t^2$$

- Donde η_t es un proceso de “ruido blanco” (entre otras, no hay correlación con su pasado, luego tampoco la hay con el pasado de ε_t).
- El proceso ε_t generado es también estacionario.
- En los momentos condicionales, en “t”, el valor de “t-1” es una realización concreta conocida (no aleatoria).

Bollerslev (1986) define el término de varianza condicional introducido en la ecuación como un “mecanismo de aprendizaje adaptativo” de un ARCH infinito. Realmente, el proceso se puede escribir, a partir del polinomio de retardos y despejando el término de la varianza como explicativa de la Ec. 3.4.2, como:

$$\begin{aligned}
 h_t - B(L)h_t^2 &= \alpha_0 + A(L)\varepsilon_t^2 \\
 h_t &= \alpha_0(1 - B(1))^{-1} + A(L)(1 - B(L))^{-1}\varepsilon_t^2 \quad (3.4.3) \\
 &= \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^p \beta_i} + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i \varepsilon_{t-i}^2
 \end{aligned}$$

donde, $B(1)$ denota el valor numérico que resulta de sustituir L por 1 en el polinomio $B(L)$. Es decir, el proceso puede escribirse como un ARCH (∞), donde los coeficientes δ_i provienen del desarrollo de la expresión $A(L)(1 - B(L))^{-1}$.

Obviamente, para poder llegar a esta expresión, es necesario que todas las raíces de $(1-B(z))$ estén fuera del círculo unitario. Es decir, es necesario que el proceso sea estacionario al menos en sentido débil.

3.4.3 Condición de Estacionariedad de un GARCH (p, q)

Si escribimos el proceso estocástico del modelo GARCH (p,q) del siguiente modo:

$$\varepsilon_t = \eta_t \sqrt{h_t^2}$$
$$\varepsilon_t / \psi_{t-1} \rightarrow N(0, h_t^2) \quad (3.4.4)$$

$$\eta_t \rightarrow N(0,1)$$

en esta sección se plantea cuál es la condición que deben cumplir los parámetros del modelo GARCH para asegurarnos la posibilidad de calcular el momento de segundo orden; es decir la $E(\varepsilon_t^2)$. Para ello, se plantea el siguiente procedimiento de demostración:

- Definir la varianza del modelo GARCH, h_t^2 , de un modo que nos permita calcular los distintos momentos sin tener en cuenta la observación a la que nos estamos refiriendo (simplificación del Milhoj (1984)).
- Expresar el valor de la $E(\varepsilon_t^2)$ en esta terminología y determinar su condición de cálculo.

Siguiendo los pasos descritos, para obtener una expresión genérica de los momentos para cualquier observación, empezamos sustituyendo sucesivamente en la expresión del proceso GARCH dada como definición en la Ec. 3.4.1, y obtenemos:

Partiendo de $\varepsilon_t = \sqrt{h_t^2} \eta_t$ y sustituyéndolo por el residuo al cuadrado

$$\begin{aligned}
h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-1}^2 \\
&= \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-j}^2 (\alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i-j}^2 h_{t-i-j}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i-j}^2) + \sum_{j=1}^p \beta_j (\alpha_0 \\
&\quad + \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i-j}^2 h_{t-i-j}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i-j}^2) \\
&= \alpha_0 \sum_{k=0}^{\infty} M(t, k) / M(t, k) = \prod_{i=1}^q \alpha_i^{a_i} \prod_{j=1}^p \beta_j^{b_j} \prod_{l=1}^n \eta_{t-s_l}^2
\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^q a_i + \sum_{j=1}^p b_j &= k \text{ y } \sum_{i=1}^q a_i = n \text{ y} \\
1 \leq S_1 < S_2 < \dots < S_n &\leq \max(kq, (k-1)q + p)
\end{aligned}$$

a partir de esta "simplificación" o agregación de términos propuesta por Milhoj (1984), logramos un producto en el cual la resolución de $M(t, k)$ no depende de "t"; es decir, podemos plantear los sucesivos momentos para la observación "t" sin que la sea necesario emplear este término para ello. Como ejemplo de los primeros momentos podemos escribir:

$$\begin{aligned}
M(t, 0) &= 1 \\
M(t, 1) &= \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 h_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \\
M(t, 2) &= \sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-j}^2 \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \right) + \sum_{j=1}^p \beta_j \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \right) \quad (3.4.5) \\
M(t, k+1) &= \sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-j}^2 M(t-i, k) + \sum_{i=1}^p \beta_i M(t-i, k)
\end{aligned}$$

en definitiva, hemos obtenido la expresión válida para cualquier momento del tiempo u observación:

$$E(M(t, k)) = E(M(s, k)) \forall k, t, s \quad (3.4.6)$$

teniendo en cuenta los resultados obtenidos para $M(t, k+1)$ y lo expresado en Ec. 3.4.6, así como que $E(\eta_{t-1}^2) = 1$ (según la definición inicial que hemos dado sobre la varianza del proceso definido en la Ec. 3.4.4, es fácil, por sustitución sucesiva de los momentos, calcular la esperanza para $M(t, k+1)$ como:

$$\begin{aligned} E(M(t, k+1)) &= E\left(\sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 M(t, k) + \sum_{i=1}^p \beta_i M(t, k)\right) = \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i\right) E(M(t, k)) \\ &= \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i\right)^{k+1} E(M(t, 0)) = \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i\right)^{k+1} \end{aligned}$$

para determinar el valor de la esperanza del proceso estocástico inicial tendremos ahora:

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t^2) &= \alpha_0 E\left(\sum_{k=0}^{\infty} M(t, k)\right) = \alpha_0 \sum_{k=0}^{\infty} E(M(t, k)) \\ &= \alpha_0 \left(1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{i=1}^p \beta_i\right)^{-1} \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

en esta expresión, el proceso sólo converge en la medida que:

$$\left(\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i\right) < 1 \quad (3.4.8)$$

en resumen, la expresión del momento de segundo orden del proceso estocástico definido como un GARCH (p,q) sólo es determinable si la suma de los parámetros

(que son siempre positivos, para asegurar que el valor de la varianza así estimada lo sea) es igual a uno.

Si se da esta condición, por simetría se puede inferir que la $E(\varepsilon_t) = 0$ y $E(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0 / t \neq s$.

Dada la enorme extensión del empleo de un modelo GARCH (1,1), conviene enumerar alguna de las ventajas que este supone respecto al ARCH (1) y, en este apartado, es importante resaltar la superioridad del modelo planteado por Bollerslev en cuanto a la existencia de momentos de órdenes superiores a los que serían calculables con un modelo ARCH.

Tal y como se comentaba en la sección 3.3.6, para un proceso ARCH (1) se puede deducir que la condición de estacionariedad es:

$$\alpha_1^m \prod_{j=1}^m (2j - 1) < 1$$

$$\alpha_1^m a_m < 1 \quad (3.4.9)$$

$$\alpha_1 < (\alpha_m)^{-1/m}$$

en el proceso GARCH (1,1), si el valor de β_0 es igual a cero, nos encontraríamos con un ARCH (1) y si $\alpha_1 > (\alpha_m)^{-1/m}$, no existiría el momento de orden “2-emésimo”. En el proceso GARCH (1,1), el momento “2-emésimo” se define como:

$$E(\varepsilon_t^{2m}) = a_m \left[\sum_{n=0}^{m-1} a_n^1 E(\varepsilon_t^{2n}) \alpha_0^{m-n} \binom{m}{m-n} \mu(\alpha_1, \beta_1, n) \right] x [1 - \mu(\alpha_1, \beta_1, n)]^{-1} \quad (3.4.10)$$

entonces, incluso si $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i = \alpha_1(1 - \beta_1)^{-1} > (\alpha_m)^{-1/m}$, el momento de orden $2m$ podría perfectamente existir en el caso del GARCH (0,1) debido a su memoria más larga.

3.4.4 Contraste de estructura GARCH (p,q)

De cara al contraste de estructura GARCH, Bollerslev (1986) establece el paralelismo de esta con la metodología Box Jenkins (1976) habitual y, por ello, deriva las funciones de autocorrelación total y parcial. Sin embargo, posteriormente se analizará un sistema más estricto y riguroso para este fin, al igual que se hacía para el modelo ARCH (q).

A partir de una sencilla transformación en la escritura del proceso GARCH (p,q) es inmediata la obtención de la función de autocovarianza. Por ello, Bollerslev (1985) plantea la siguiente expresión matemáticamente igual a la vista hasta el momento:

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t^2} \eta_t$$

$$\varepsilon_t^2 \rightarrow N(0, h_t^2)$$

$$v_t = (\varepsilon_t^2 - h_t) = (h_t^2 \eta_t^2 - h_t^2)(\eta_t^2 - 1) h_t^2 \quad (3.4.11)$$

$$\eta_t^2 \rightarrow N(0, h_t^2)$$

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \varepsilon_{t-j}^2 - \sum_{j=1}^p \beta_j v_{t-j} + v_t$$

definida la función de autocovarianza (simétrica) como:

$$\gamma_n = \gamma_{-n} = E(\varepsilon_t^2; \varepsilon_{t-n}^2) \quad (3.4.12)$$

uniendo esta expresión y la lograda en la Ec. 3.4.11, y teniendo en cuenta que se ha definido v_t como un proceso estacionario, se puede llegar a la siguiente conclusión:

$$\begin{aligned} \gamma_n = E(\varepsilon_t^2; \varepsilon_{t-n}^2) &= E \left[\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \varepsilon_{t-j}^2 - \sum_{j=1}^p \beta_j v_{t-j} + v_t \right) \varepsilon_{t-n}^2 \right] \\ &= \alpha_0 E(\varepsilon_{t-n}^2) + \sum_{i=1}^q \alpha_i E(\varepsilon_t^2 \varepsilon_{t-n}^2) \\ &\quad + \sum_{j=1}^p \beta_j E(\varepsilon_t^2 \varepsilon_{t-n}^2) - \sum_{j=1}^p \beta_j E(v_{t-j} \varepsilon_{t-n}^2) + \sum_{j=1}^p \beta_j E(v_t \varepsilon_{t-n}^2) \\ &= 0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \gamma_{n-i} + \sum_{j=1}^p \beta_j \gamma_{n-i} + 0 + 0 \end{aligned}$$

Bollerslev (1986) propone resumir el resultado anterior en una única expresión:

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \sum_{i=1}^m \varphi_i \gamma_{n-i} \\ \varphi_i &= \alpha_i + \beta_j \quad i = 1, \dots, q \\ \alpha_i &= 0 \text{ para } i > q \quad (3.4.13) \\ \beta_i &= 0 \text{ para } i > p \\ m &= \max(p, q) \end{aligned}$$

de forma similar al procedimiento de Yule-Walker, a partir de esta expresión, la función de autocorrelación se expresa como:

$$\rho_n = \gamma_n \gamma_0^{-1} = \sum_{i=1}^m \varphi_i \gamma_{n-i} \quad n \geq p + 1 \quad (3.4.14)$$

a partir de la Ec. 3.4.14, se deriva que las primeras “p” autocorrelaciones dependen directamente del valor de los parámetros $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$.

Para el caso de la función de autocorrelación parcial de un ARCH (q), la expresión anterior se puede plantear para los primeros “k” retardos, resultando ϕ_{kk} la función de autocorrelación parcial que resuelve el conjunto de las “k” ecuaciones de:

$$\rho_n = \gamma_n \gamma_0^{-1} = \sum_{i=1}^m \varphi_{ki} \rho_{n-i} \quad n = 1, \dots, k$$

en esta expresión, para valores superiores a “q” en un proceso ARCH (q) el valor es nulo:

$$\phi_{kk} \neq 0 \quad k \leq q$$

$$\phi_{kk} = 0 \quad k > q$$

Para un proceso GARCH (p,q), la función de autocorrelación parcial es, en general no cero, aunque tiende hacia este valor. Para obtener un valor estimado del correlograma, con frecuencia se siguen los siguientes pasos:

- Estimar el modelo inicial del cual se pretende observar si su varianza es condicionalmente heterocedástica o no, por ejemplo:

$$Z_t = a_0 + a_1 Z_{t-1} + a_2 Z_{t-2} + \dots + a_k Z_{t-k} + \varepsilon_t$$

- Obtener los cuadrados del error de predicción y determinar su varianza descriptiva:

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{t=1}^N \hat{\varepsilon}_t^2$$

- Calcular la autocorrelaciones simples con la siguiente expresión:

$$\rho_i = \frac{\sum_{t=i+1}^N (\hat{\varepsilon}_t^2 - \hat{\sigma}^2)(\hat{\varepsilon}_{t-1}^2 - \hat{\sigma}^2)}{\sum_{t=1}^N (\hat{\varepsilon}_t^2 - \hat{\sigma}^2)}$$

Comprobar si son significativamente diferentes de cero a partir de la expresión de Ljung-Box con “n” grados de libertad. Rechazar la hipótesis nula de incorrelación en el valor de los residuos al cuadrado es equivalente a aceptar la existencia de un modelo ARCH o GARCH.

$$L - Q = N(N + 2) \sum_{i=1}^n \hat{\rho}_i^2 / (N - i)$$

esta expresión se distribuye como una X^2 con “n” grados de libertad.

De cara a exponer un sistema de contraste de estructura estricto, Bollerslev propone aplicar el contraste del Multiplicador de Lagrange bajo la hipótesis nula de no existencia del proceso GARCH o, lo que es lo mismo, que todos los parámetros de la expresión de la varianza h_t son nulos, salvo la constante. Para ello, se construye el siguiente estadístico (particionando la matriz $w = w_1 + w_2$ de forma que queden separadas constante y resto de parámetros). El sistema sería:

$$h_t = z_t'w = z_{1t}'w_1 + z_{2t}'w_2 \quad (3.4.15)$$

para la hipótesis nula $H_0: w_2 = 0$, el contraste del multiplicador de Lagrange sería:

$$\xi_{LM}^* = \frac{1}{2} f_0' Z_0 (Z_0' Z_0)^{-1} Z_0' f_0 \quad (3.4.16)$$

donde f_0 es la vector del proceso al cuadrado normalizado (divido por la varianza) y f_0 es el vector de la varianza evaluada en la primera derivada, ambos para cada una de las distintas observaciones:

$$f_0 = (\varepsilon_1^2 h_t^{-1} - 1, \dots, \varepsilon_T^2 h_T^{-1} - 1)' \quad (3.4.17)$$

$$Z_0 = \left(h_1 \frac{\partial h_1}{\partial w}, \dots, h_T \frac{\partial h_T}{\partial w} \right)$$

cuando la hipótesis nula es cierta, el valor de este contraste se distribuye como una X_r^2 , siendo “r” el número de parámetros incluidos en w_2 .

El empleo de este sistema ofrece resultados ligeramente diferentes a los que resultarían de la operación $T \cdot R^2 \rightarrow X_r^2$ de Breusch y Pagan (1978). Ello es debido a que la derivada parcial de la varianza respecto a los parámetros no se simplifica cuando la ecuación de la varianza condicional contiene términos desplazados de la propia varianza. Finalmente, Bollerslev hace las siguientes consideraciones sobre el contraste expuesto:

- Bajo la hipótesis nula, $Z_0' Z_0$ es una matriz singular si tanto p como q son mayores que cero, por lo que no se puede construir un test general para el proceso GARCH (p,q).
- En el caso de un ARCH (q) como hipótesis nula $Z_0' Z_0$ es singular para un GARCH ($r_1, q + r_2$), para $r_1 > 0$ y $r_2 > 0$.
- En el ARCH (q) como hipótesis nula, el test de multiplicador de Lagrange (LM) para el GARCH(r,q) y el ARCH (q+r) coinciden.

3.4.5 Modelo GARCH de Regresión

El modelo GARCH (p,q) de regresión se puede definir, en forma esquemática, como:

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= y_t - x_t' b \\ \varepsilon_t / \psi_{t-1} &\rightarrow N(0, h_t^2) \\ h_t &= z_t' w \quad (3.4.18) \\ z_t &= (1, \varepsilon_{t-1}^2; \dots; \varepsilon_{t-q}^2; h_{t-1}^2; \dots; h_{t-p}^2) \\ w' &= (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)\end{aligned}$$

si llamamos al vector de parámetros $\theta = (b', w')$ tal que $\theta \in \Theta$, siendo Θ un subespacio compacto de un espacio euclidiano tal que ε_t posee segundos momentos finitos.

Posteriormente y de cara a la fijación del criterio de convergencia será necesario referirse al verdadero valor de los parámetros, al que llamaremos θ_0 .

La función del logaritmo máximo verosímil se puede escribir como:

$$\begin{aligned}L_t(\theta) &= T^{-1} \sum_{t=1}^T l_t(\theta) \quad (3.4.19) \\ l_t(\theta) &= -\frac{1}{2} \log(h_t^2) - \frac{1}{2} \varepsilon_t^2 h_t^{-2}\end{aligned}$$

derivando respecto al vector w de parámetros, obtenemos las condiciones de primer y segundo orden como:

$$\frac{\partial l_t}{\partial w} = \frac{1}{2} h_t^{2-1} \frac{\partial l_t}{\partial w} \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2} - 1 \right)$$

(3.4.20)

$$\frac{\partial^2 l_t}{\partial w \partial w'} = \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial w'} \left[\frac{1}{2} h_t^{2-1} \frac{\partial h_t^2}{\partial w} \right] - \frac{1}{2} (h_t^2)^{-2} \frac{\partial h_t}{\partial w} \frac{\partial h_t}{\partial w'} \frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2}$$

en donde, de forma recursiva y comenzando por obtener una estimación previa para h_t^2 y ε_t^2 , $t \leq 0$ que puede ser la varianza muestral, obtenemos la siguiente expresión de la derivada parcial respecto a los parámetros del modelo GARCH:

$$\frac{\partial h_t^2}{\partial w} = z_t \sum_{i=1}^p \beta_i \frac{\partial h_{t-i}^2}{\partial w} \quad (3.4.21)$$

para estimar ahora los parámetros del modelo de regresión, es decir “b”, se deriva la función:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_t}{\partial b} &= \varepsilon_t x_t h_t^{2-1} + \frac{1}{2} \partial h_t^{2-1} \frac{\partial h_t^2}{\partial b} \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2} - 1 \right) \\ \frac{\partial^2 l_t}{\partial b \partial b'} &= -\partial h_t^{2-1} x_t x_t' - \frac{1}{2} \partial h_t^{2-2} \frac{\partial h_t^2}{\partial b} \frac{\partial h_t^2}{\partial b'} \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2} \right) - 2 h_t^{-2} \varepsilon_t x_t \frac{\partial h_t^2}{\partial b} \\ &\quad + \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2 h_t^2} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial b'} \left(\frac{1}{2} \partial h_t^{2-1} \frac{\partial h_t^2}{\partial b} \right) \quad (3.4.22) \end{aligned}$$

donde, nuevamente por un procedimiento de resolución recursiva, se puede obtener la derivada parcial de la varianza respecto a los parámetros de la regresión como:

$$\frac{\partial h_t^2}{\partial b} = -2 \sum_{j=1}^q \alpha_j x_{t-j} \varepsilon_{t-j} + \sum_{j=1}^p \beta_j \frac{\partial h_{t-j}^2}{\partial b} \quad (3.4.23)$$

se puede demostrar que los elementos de la matriz de información bloque-diagonal correspondientes a “b” son cero, con lo cual, w puede ser estimada sin pérdida de eficiencia asintótica con una estimación consistente de “b” y viceversa.

De cara a obtener los estimadores de máxima verosimilitud es necesario recurrir a un sistema iterativo. Bollerslev (1986) recomienda el método del algoritmo de Berndt, Hall, Hall y Hausman (1974) - BHHH - y no el propuesto por Engle (el de *Scoring*) ya que los dos elementos recursivos que se han señalado en las ecuaciones anteriores hacen que éste sea demasiado complejo y que la convergencia no esté asegurada.

En el algoritmo BHHH, llamaremos $\theta^{(i)}$ al vector estimado de parámetros obtenido en la iteración i -ésima. Para calcular el siguiente valor, se aplica la fórmula:

$$\theta^{(i+1)} = \theta^{(i)} + \lambda_i \left(\sum_{t=1}^T \frac{\partial l_t}{\partial \theta} \frac{\partial l_t}{\partial \theta'} \right)^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{\partial l_t}{\partial \theta} \quad (3.4.24)$$

donde la derivada del logaritmo de verosimilitud se evalúa para el valor $\theta^{(i)}$ y λ_i es el valor o criterio de convergencia elegido que marca el diferencial entre dos resultados de estimación para llegar al resultado final. Las iteraciones para $w^{(i)}$ y para $b^{(i)}$ se pueden llevar a cabo de forma separada, ya que la matriz de información es bloque diagonal.

A partir del desarrollo de Weis (1982), se demuestra que el vector estimado con este procedimiento, $\widehat{\theta}_T$, es consistente para θ_0 y asintóticamente normal, con media θ_0 y matriz de varianzas covarianzas igual a $F = E((\partial l_t / \partial \theta)(\partial l_t / \partial \theta'))$ siendo una estimación consistente de esta última expresión la de $T^{-1} \sum_{t=1}^T ((\partial l_t / \partial \theta)(\partial l_t / \partial \theta'))^{-1}$

3.4.6 Predicción con modelos GARCH(p,q)

En el modelo GARCH (p,q), los valores de predicción de la varianza condicional se pueden definir del siguiente modo:

Sea:

$$h_{t+s} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon_{t+s-i}^2 + \beta_i h_{t+h-i} + \sum_{i=s}^m \alpha_i \varepsilon_{t+s-i}^2 + \beta_i h_{t+s-i}$$

$$n: \min\{m, s - 1\}; m: \max\{p, q\} \quad s > m$$

- Esperanza No-Condicional

$$E(\varepsilon_{t-s}^2) = \sigma_\varepsilon^2 = \alpha_0 \left[1 - \sum \alpha_i + \beta_i \right]^{-1}$$

- Esperanza Condicional

$$E_t(h_{t+s}) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) E_t(h_{t+s-i}) + \sum_{i=s}^m (\alpha_i \varepsilon_{t+s-i}^2 + \beta_i h_{t+s-i}) \quad (3.4.25)$$

para poder comparar las varianzas marginal y condicional, si se sustituye el término independiente de la segunda por $\sigma_\varepsilon^2(1 - \sum \alpha_i + \beta_i) = \alpha_0$ se obtiene la siguiente expresión:

$$E_t(h_{t+s}) = \sigma_\varepsilon^2 + (\sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) E_t(h_{t+s-i}) - \sigma_\varepsilon^2) + \sum_{i=s}^m (\alpha_i \varepsilon_{t+s-i}^2 + \beta_i h_{t+s-i}) \quad \mathbf{25}$$

De la ecuación Ec. 25 se pueden concluir que a medida que $s \rightarrow \infty$, la $E(h_{t+s}) \rightarrow \sigma_e^2$. Baillie y Bollerslev (1992) derivan la siguiente expresión del error cuadrático medio:

$$E_T(v_{T,s}^2) = (k_2 - 1)\alpha^2 \sum_{i=1}^{s-1} (\alpha + \beta)^{2(1-i)} E_T(\sigma_{t-s-i}^4)$$

en esta expresión, $v_{T,s} = \sigma_{T+s}^2 - E_T(\sigma_{T+s}^2)$ y k_2 es el valor del coeficiente de curtosis (el acumulante de orden 2 de la densidad condicional de e_t , que, si es una normal, sería tres).

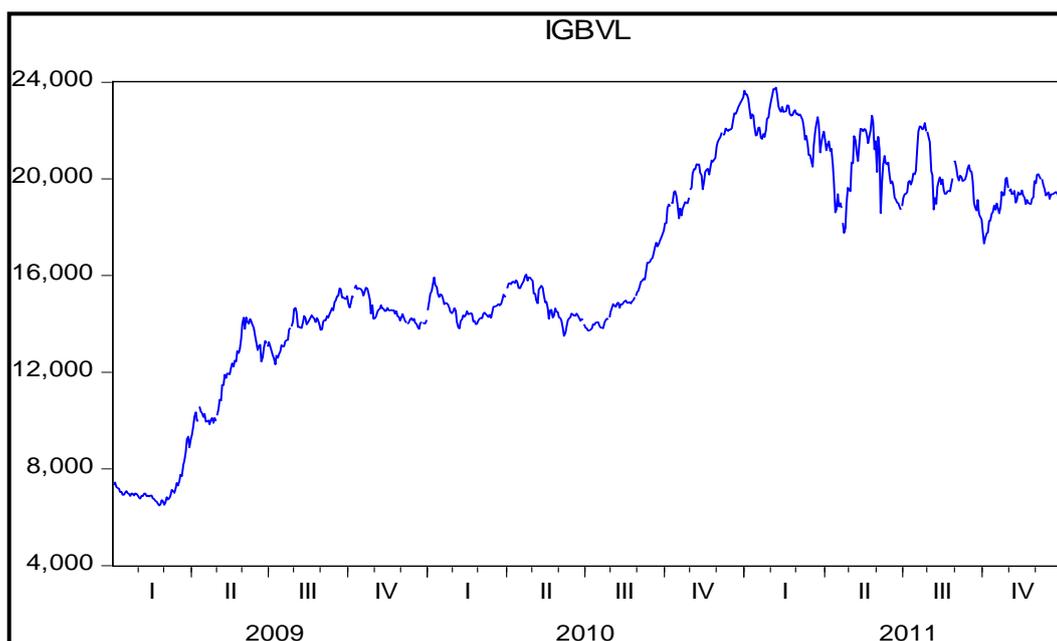
IV. APLICACIÓN Y DISCUSIÓN

De acuerdo a los objetivos planteados se presenta a continuación el análisis de la modelización del valor diario del Índice General de la Bolsa de Valores de Lima (IGBVL), periodo 2009 – 2011, para obtener el modelo de predicción se construirá primero el modelo ARIMA utilizando la estrategia de Box and Jenkins (1976) y segundo los modelos ARCH y GARCH, para la media y la varianza respectivamente.

Modelo ARIMA al IGBVL

El primer paso para realizar el modelado de la media del IGBVL, consiste en analizar la serie del valor diario del IGBVL, periodo 2009 – 2011. (Ver Figura 1):

Figura 1:
Serie del IGBVL diario, periodo 2009 - 2011



En el 2009 la crisis financiera global continuó afectando de manera gravitante a los mercados y sus efectos mantuvieron alerta a los agentes económicos a lo largo de todo el año, sin embargo la Bolsa de Valores de Lima figuró entre las plazas más rentables del mundo.

En los meses de Enero y Febrero se observó un escaso movimiento, el cual puede ser atribuido a la severa caída de los precios de las acciones ocurrida en los meses precedentes, por lo que las sesiones transcurrieron en un ambiente de escepticismo. Cabe indicar que las cifras de montos y operaciones de estos dos meses fueron las más bajas del último año.

En el periodo Marzo-Mayo el Índice General BVL se incrementó en 100.73%, resultado que sustenta el alza que nuestro mercado mostró a fines de año. En este lapso de tiempo los índices de las bolsas más representativas a nivel mundial subieron entre 20% y 30%; en tanto que en la región, en Brasil y México la subida bordeó el 40%.

A inicios de junio la fuerte presión compradora cedió, dando pase a una etapa de corrección que se prolongó hasta la primera semana de Julio, lapso en el cual el IGBVL retrocedió 14%. Posteriormente, los siguientes meses el mercado mostró nuevos signos de recuperación pasando a una fase de pequeñas alzas y bajas, donde nuestro principal indicador osciló alrededor de los 14,000 - 15,000 puntos. De este modo, al cierre del 2009 el Índice General BVL registró un rendimiento anual de 100.99%.

Superados de manera parcial los efectos de la crisis financiera mundial que afectaron la economía y la actividad bursátil en los últimos años, en el 2010 se observó un fortalecimiento de nuestro mercado de valores, siendo más evidente esta mejoría en los últimos meses del año.

En este contexto, el mercado tuvo un comportamiento irregular en el primer semestre, en junio, el IGBVL bordeaba los 14,000 puntos, con una pérdida de 1.3%. En Julio nuestra bolsa inició un leve avance en sus principales índices, es a partir de Agosto donde se refuerza el ascenso de las cotizaciones, obteniendo el Índice General BVL variaciones positivas de 6.15%, 17.91%, 7.58%, 8.50% y 12.08%, resultados correspondientes a los últimos cinco meses.

De este modo el Índice General BVL cerró el 2010 en 23.374 puntos, el valor más alto de los últimos 41 meses, acercándose al récord histórico establecido en Julio del 2007 y logrando un rendimiento anual de 64.99%, lo que llevo a nuestra bolsa a ser considerada como una de las más rentables del mundo. Cabe destacar que el IGBVL subió 287% respecto al día 27 de Octubre del año 2008, fecha en la cual nuestro principal indicador llegó a su nivel más bajo en el peor momento de la crisis financiera mundial.

Es importante señalar que el crecimiento observado en la negociación del mercado de acciones en el 2010 se vio favorecido por la mayor ejecución de operaciones atípicas, destacando las realizadas en Octubre, con acciones de Volcan A y B (668.4 millones de dólares); en Agosto, con motivo de la OPA de acciones de Milpo (419 millones de dólares); en Octubre, operación con acciones de Pacífico Vida y Pacífico Peruano Suiza (169 millones de dólares); y en Diciembre, debido a la OPV de acciones de Inmobiliaria Milenia (111.9 millones de dólares).

Luego de la recuperación mostrada durante el 2009 y 2010, tras la fuerte caída producida por la crisis financiera de EE.UU., los mercados bursátiles del mundo ingresaron en el 2011 a un periodo de comportamiento errático, con pequeños ciclos alcistas y bajistas. En el caso particular de nuestra bolsa, un factor adicional que repercutió de manera trascendental en la volatilidad de las cotizaciones fue el proceso electoral presidencial realizado en los meses de Abril y Junio.

Para la Bolsa de Lima al cierre del cuarto mes nuestro principal indicador acusaba una pérdida acumulada de 16%., en mayo, mientras que la mayoría de bolsas en el mundo mostraron pérdidas afectadas por la crisis fiscal en Grecia y Portugal, el IGBVL se recuperó en casi 10%.

Posteriormente, el resultado del proceso electoral presidencial de segunda vuelta promovió una liquidación de posiciones sin precedentes al día siguiente del balotaje, originándose la mayor caída diaria del Índice General BVL en toda su historia -desde su creación en 1982- al descender 12.51% (6 de Junio).

En los siguientes días, luego de la brusca caída se produjo una recuperación parcial de los 2,647 puntos perdidos, pero después el desconcierto y la desconfianza se apoderó nuevamente del mercado, retomándose la ola bajista hacia fines de Junio. Para el mes de Julio el índice tuvo un continuo crecimiento debido a las altas cotizaciones de los metales.

Para los últimos cuatro meses del año, el Índice General ingresó a una etapa de tendencia lateral, que fue interrumpida brevemente por una fuerte caída en los primeros días de octubre. En este periodo, la atención estuvo centrada en los efectos generados por la crisis de la deuda de la zona euro y en la evolución de las economías desarrolladas.

Luego de realizar una breve descripción del gráfico la serie original del IGBVL, se procede a realizar la modelación de la media del IGBVL bajo el esquema propuesto por Box y Jenkins (1976):

Análisis de la Estacionariedad

Para realizar la modelación del IGBVL, es de importancia probar el cumplimiento de estacionariedad en la serie (por lo menos en sentido débil o amplio). Para su detección, existen diversos instrumentos básicamente estadísticos y gráficos. Entre las pruebas gráficas, contamos con las funciones de autocorrelación simple y parcial (f.a.s. y f.a.p. respectivamente).

En nuestro caso, se puede observar (Ver Cuadro 1) una posible no estacionariedad, debido a que la caída es un tanto lenta en la función de autocorrelación simple, mientras que en la función de autocorrelación parcial existe un solo valor de autocorrelación fuera del intervalo de confianza. Por lo tanto haremos uso de pruebas estadísticas para comprobar y determinar la no estacionariedad de la serie del valor diario del IGBVL.

Cuadro 1:
Función de autocorrelación simple y parcial del IGBVL

Date: 08/07/13 Time: 22:36						
Sample: 1/05/2009 12/30/2011						
Included observations: 752						
	Partial		AC	PAC	Q-Stat	Prob
Autocorrelation	Correlation					
. *****	. *****		1	0.994	0.994	746.56 0.000
				-		
. *****	.		2	0.989	0.019	1485.5 0.000
				-		
. *****	.		3	0.983	0.008	2216.6 0.000
				-		
. *****	.		4	0.977	0.023	2939.7 0.000
				-		
. *****	.		5	0.970	0.018	3654.6 0.000
				-		
. *****	.		6	0.964	0.033	4360.7 0.000
. *****	.		7	0.957	0.000	5058.2 0.000
				-		
. *****	.		8	0.951	0.012	5746.9 0.000
. *****	.		9	0.944	0.000	6426.9 0.000

. *****	.		10	0.938	0.035	7098.9	0.000
						-	
. *****	.		11	0.931	0.014	7762.7	0.000
						-	
. *****	.		12	0.925	0.015	8418.2	0.000
						-	
. *****	.		13	0.918	0.006	9065.3	0.000
						-	
. *****	.		14	0.912	0.000	9704.3	0.000
. *****	.		15	0.906	0.010	10335.	0.000
. *****	.		16	0.900	0.016	10959.	0.000
. *****	.		17	0.894	0.029	11575.	0.000
. *****	.		18	0.888	0.018	12185.	0.000
						-	
. *****	.		19	0.883	0.009	12787.	0.000
						-	
. *****	.		20	0.877	0.055	13383.	0.000
. *****	.		21	0.871	0.007	13971.	0.000
. *****	.		22	0.865	0.019	14552.	0.000
. *****	.		23	0.860	0.038	15127.	0.000
. *****	.		24	0.855	0.016	15696.	0.000
						-	
. *****	.		25	0.850	0.025	16259.	0.000
						-	
. *****	.		26	0.844	0.024	16816.	0.000
						-	
. *****	.		27	0.838	0.013	17365.	0.000
. *****	.		28	0.833	0.007	17909.	0.000
						-	
. *****	.		29	0.828	0.012	18446.	0.000
						-	
. *****	.		30	0.822	0.009	18977.	0.000
						-	
. *****	.		31	0.816	0.011	19501.	0.000
. *****	.		32	0.811	0.015	20018.	0.000
						-	
. *****	.		33	0.805	0.013	20529.	0.000
						-	
. *****	.		34	0.799	0.043	21033.	0.000
. *****	.		35	0.793	0.001	21530.	0.000
. *****	.		36	0.787	0.005	22020.	0.000

Para ello contamos con el estadístico Q de Box y Pierce y el Test de raíces unitarias de Dickey y Fuller Aumentado en cuanto a las pruebas estadísticas.

Para la serie del IGBVL diario, el Test de Dickey y Fuller aumentado (Ver Cuadro 2), no permite rechazar la hipótesis nula al 5% de nivel de significancia, donde la hipótesis nula es la no estacionariedad de la serie, por lo tanto conlleva a concluir que la serie del IGBVL diario no es estacionaria.

**Cuadro 2:
Test de Dickey y Fuller Aumentado para IGBVL**

Null Hypothesis: IGBVL has a unit root				
Exogenous: Constant				
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=19)				
			t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic			-1.943153	0.3125
Test values:	critical			
	1% level		-3.438831	
	5% level		-2.865173	
	10% level		-2.568760	
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(IGBVL)				
Method: Least Squares				
Date: 08/06/13 Time: 22:25				
Sample (adjusted): 1/06/2009 12/30/2011				
Included observations: 751 after adjustments				
Variable	Coefficien			
	t	Std. Error	t-Statistic	Prob.
IGBVL(-1)	-0.004877	0.002510	-1.943153	0.0524
C	95.55074	42.26216	2.260905	0.0241
R-squared	0.005016	Mean dependent var	16.1691	
Adjusted squared	0.003687	var	9	
S.E. of regression	296.6892	S.D. dependent var	297.237	
Sum squared resid	65930336	Akaike info criterion	14.2259	
Log likelihood	-5339.828	Schwarz criterion	14.2382	
F-statistic	3.775844	Hannan-Quinn criter.	14.2306	
Prob(F-statistic)	0.052372	Durbin-Watson stat	5	
			1.89330	
			3	

Este resultado nos lleva a analizar una serie derivada de la misma, específicamente la rentabilidad diaria del Índice General de la Bolsa de Valores de Lima (RIGBVL). A continuación se presenta los resultados obtenidos (Ver Cuadro 3 y Cuadro 4) para determinar si la RIGBVL es una serie estacionaria, lo que permitirá continuar con el proceso de modelación.

Cuadro 3:

Función de autocorrelación simple y parcial de la RIGBVL

Date: 08/12/13 Time: 23:49						
Sample: 1/05/2009 12/30/2011						
Included observations: 751						
Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat Prob
.		.		1	0.060	0.060 2.6759 0.102
.		.		2	0.009	0.006 2.7431 0.254
.		.		3	0.065	0.065 5.9592 0.114
.		.		4	0.063	0.056 8.9841 0.061
.		.		5	0.046	0.039 10.594 0.060
.		.		6	0.033	0.024 11.397 0.077
.		.		7	0.025	0.015 11.889 0.104
.		.		8	0.012	0.001 11.995 0.151
				-	-	
.		.		9	0.035	0.045 12.927 0.166
.		.		10	0.023	0.020 13.334 0.206
.		.		11	0.020	0.013 13.644 0.253
.		.		12	0.024	0.024 14.080 0.296
				-	-	
.		.		13	0.007	0.010 14.121 0.365
				-	-	
.		.		14	0.017	0.018 14.345 0.424
				-	-	
.		.		15	0.044	0.048 15.842 0.393
				-	-	
.		.		16	0.055	0.054 18.155 0.315
				-	-	
.		.		17	0.038	0.033 19.247 0.315
.		.		18	0.007	0.015 19.282 0.375
. *		. *		19	0.084	0.099 24.698 0.171
				-	-	
.		.		20	0.016	0.009 24.903 0.205
				-	-	
.		.		21	0.048	0.036 26.700 0.181
				-	-	
.		.		22	0.035	0.040 27.644 0.188

				-	-		
.		.		23	0.033	0.039	28.494 0.198
.		.		24	0.035	0.037	29.450 0.204
.		.		25	0.046	0.051	31.133 0.185
				-	-		
.		.		26	0.015	0.006	31.310 0.217
				-	-		
.		.		27	0.042	0.032	32.716 0.207
.		.		28	0.022	0.031	33.082 0.233
				-	-		
.		.		29	0.007	0.007	33.119 0.273
.		.		30	0.030	0.021	33.805 0.289
				-	-		
.		.		31	0.035	0.051	34.771 0.293
.		.		32	0.015	0.014	34.942 0.330
.	*	.	*	33	0.079	0.087	39.900 0.190
				-	-		
.		.		34	0.004	0.004	39.915 0.224
.		.		35	0.004	0.008	39.925 0.260
.	*	.		36	0.082	0.066	45.289 0.138

Cuadro 4:

Test de Dickey y Fuller Aumentado para la RIGBVL

Null Hypothesis: RIGBVL has a unit root			
Exogenous: Constant			
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=19)			
		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-25.77534	0.0000
Test	critical		
values:	1% level	-3.438842	
	5% level	-2.865178	
	10% level	-2.568763	
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.			
Augmented Dickey-Fuller Test Equation			
Dependent Variable: D(RIGBVL)			
Method: Least Squares			
Date: 08/13/13 Time: 00:04			
Sample (adjusted): 1/07/2009 12/30/2011			
Included observations: 750 after adjustments			
Variable	Coefficien		
	t	Std. Error	t-Statistic Prob.

RIGBVL(-1)	-0.940425	0.036485	-25.77534	0.0000
C	0.001206	0.000639	1.887415	0.0595
R-squared	0.470393	Mean dependent var	1.34E-05	
Adjusted squared	0.469685	R-S.D. dependent var	5	0.02396
S.E. of regression	0.017452	Akaike info criterion	3	5.25609
Sum resid squared	0.227813	Schwarz criterion	2	5.24377
Log likelihood	1973.035	Hannan-Quinn criter.	5	1.99401
F-statistic	664.3682	Durbin-Watson stat	2	
Prob(F-statistic)	0.000000			

En el Cuadro 3 se puede observar que tanto la función de autocorrelación simple (f.a.s) y la función de autocorrelación parcial (f.a.p) tienen valores muy cercanos a cero y se encuentran dentro del intervalo de confianza, lo que permite pensar que la RIGBVL es estacionaria. Para confirmar dicha opinión se procede a analizar los resultados obtenidos al aplicar el de Test de Dickey y Fuller Aumentado a la RIGBVL.

En base a lo anterior (Ver Cuadro 4), se observa que el estadístico de prueba de Dickey – Fuller Aumentado en valor absoluto es 25.7753 (Ver Cuadro 4) y el p_value es menor al 5% de nivel significancia lo cual conduce a rechazar la hipótesis nula, esto indica que la serie de la rentabilidad diaria del Índice General de la Bolsa de Valores de Lima es estacionaria en media. Por tanto es aplicable la metodología de análisis de series de tiempo a la RIGBVL. Una vez que ya contamos con una serie de tiempo estacionaria podemos dar el siguiente paso que es la identificación del modelo, el cual se presenta a continuación:

Para encontrar el modelo que permita estimar la rentabilidad diaria del IGBVL (RIGBVL), se observaron los gráficos de autocorrelación simple y autocorrelación parcial de la RIGBVL (Ver Cuadro 3) y estos tienden a cero

después del primer retardo, lo que indica que podemos considerar de manera tentativa los siguientes modelos: AR (1,0), MA (1) y ARMA (1,1).

Se presenta a continuación las salidas de cada uno de los modelos tentativos:

Cuadro 5:
Modelo AR (1) de la RIGVBL

Dependent Variable: RIGBVL				
Method: Least Squares				
Date: 08/13/13 Time: 22:34				
Sample (adjusted): 1/07/2009 12/30/2011				
Included observations: 750 after adjustments				
Convergence achieved after 2 iterations				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.064674	0.036447	1.774439	0.0464
R-squared	-0.001194	Mean dependent var		0.00128
Adjusted R-squared	-0.001194	S.D. dependent var		0.01747
S.E. of regression	0.017482	Akaike info criterion		5.25400
Sum squared resid	0.228898	Schwarz criterion		5.24784
Log likelihood	1971.253	Hannan-Quinn criter.		5.25163
Durbin-Watson stat	1.994801			4
Inverted AR Roots	.06			

Cuadro 6:
Modelo MA (1) de la RIGVBL

Dependent Variable: RIGBVL				
Method: Least Squares				
Date: 08/13/13 Time: 22:35				
Sample (adjusted): 1/06/2009 12/30/2011				
Included observations: 751 after adjustments				
Convergence achieved after 3 iterations				
MA Backcast: 1/05/2009				
Variable	Coefficien t	Std. Error	t-Statistic	Prob.
MA(1)	0.063983	0.036441	1.755824	0.0795
R-squared	-0.001412	Mean dependent var	0.00130	1
Adjusted R-squared	-0.001412	S.D. dependent var	0.01746	6
S.E. of regression	0.017479	Akaike info criterion	5.25435	7
Sum squared resid	0.229124	Schwarz criterion	5.24820	3
Log likelihood	1974.011	Hannan-Quinn criter.	5.25198	6
Durbin-Watson stat	1.998454			
Inverted MA Roots	-.06			

Cuadro 7:
Modelo ARMA (1,1) de la RIGVBL

Dependent Variable: RIGBVL				
Method: Least Squares				
Date: 08/13/13 Time: 22:36				
Sample (adjusted): 1/07/2009 12/30/2011				
Included observations: 750 after adjustments				
Convergence achieved after 136 iterations				
MA Backcast: 1/06/2009				
Variable	Coefficien t	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	-0.343595	0.398650	-0.861896	0.3890

MA(1)	0.403675	0.388779	1.038315	0.2995
		Mean	dependent	0.00128
R-squared	-0.000054	var		3
Adjusted R-squared	-0.001391	S.D. dependent var		0.01747
				-
S.E. of regression	0.017483	Akaike info criterion		5.25248
				-
Sum squared resid	0.228637	Schwarz criterion		5.24016
				-
Log likelihood	1971.680	Hannan-Quinn criter.		5.24773
Durbin-Watson stat	1.984797			3
Inverted AR Roots	-.34			
Inverted MA Roots	-.40			

De los tres modelos tentativos se considera como el mejor el modelo AR (1), Ver Cuadro 5, por que el parámetro AR (1) es significativo, dado que el valor del p_value es menor al 5% de nivel de significancia con lo que se rechaza la hipótesis nula de que el valor estimado sea igual a cero, a diferencia de los modelos MA (1), Ver Cuadro 6, y ARMA (1,1), Ver Cuadro 7.

Por lo tanto el modelo ARMA para estimar la rentabilidad es:

$$RIGBVL_t = 0.064674 * RIGBVL_{t-1}$$

Para verificar que la estimación del modelo AR (1) es correcta, se realiza la prueba de autocorrelación conocida como el estadístico “Q” de Ljung Box, se analiza el siguiente correlograma de los residuos del modelo estimado.

Cuadro 8:

Función de autocorrelación simple y parcial: Errores del modelo AR (1) de la RIGBVL

Date: 08/07/13 Time: 23:45 Sample: 1/07/2009 12/30/2011 Included observations: 750 Q-statistic probabilities adjusted for 1 ARMA term(s)							
Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
.		.		-	-		
.		.		1	0.004	0.004	0.0112
.		.		2	0.002	0.002	0.0134 0.908
.		.		3	0.061	0.061	2.8500 0.241
.		.		4	0.058	0.058	5.3690 0.147
.		.		5	0.040	0.041	6.5880 0.159
.		.		6	0.029	0.026	7.2406 0.203
.		.		7	0.023	0.016	7.6352 0.266
.		.		8	0.012	0.004	7.7420 0.356
.		.		-	-		
.		.		9	0.038	0.046	8.8400 0.356
.		.		10	0.025	0.017	9.3223 0.408
.		.		11	0.018	0.012	9.5561 0.480
.		.		12	0.024	0.026	9.9968 0.531
.		.		-	-		
.		.		13	0.009	0.008	10.054 0.611
.		.		-	-		
.		.		14	0.014	0.016	10.199 0.678
.		.		-	-		
.		.		15	0.039	0.044	11.372 0.657
.		.		-	-		
.		.		16	0.051	0.055	13.343 0.576
.		.		-	-		
.		.		17	0.035	0.037	14.264 0.579
.		.		18	0.004	0.007	14.279 0.647
.*		.*		19	0.086	0.102	19.972 0.334
.		.		-	-		
.		.		20	0.018	0.000	20.231 0.381
.		.		-	-		
.		.		21	0.046	0.035	21.884 0.347
.		.		-	-		
.		.		22	0.030	0.039	22.563 0.368
.		.		-	-		
.		.		23	0.034	0.045	23.471 0.376

.		.		24	0.035	0.031	24.397	0.382
.		.		25	0.047	0.054	26.090	0.349
					-	-		
.		.		26	0.016	0.001	26.282	0.393
					-	-		
.		.		27	0.043	0.034	27.711	0.373
.		.		28	0.024	0.029	28.155	0.403
					-	-		
.		.		29	0.004	0.007	28.165	0.456
.		.		30	0.033	0.025	29.009	0.465
					-	-		
.		.		31	0.038	0.051	30.141	0.458
.		.		32	0.013	0.006	30.266	0.504
. *		. *		33	0.080	0.088	35.274	0.316
					-	-		
.		.		34	0.009	0.010	35.336	0.358
					-	-		
.		.		35	0.001	0.005	35.337	0.405
. *		.		36	0.079	0.064	40.315	0.247

Analizando el Q-Stat (Ver Cuadro 8), se puede decir que los residuos siguen un comportamiento aleatorio donde los valores de las correlaciones están dentro de las bandas, además los valores de significación del estadístico Q-Stat, de todas las observaciones, son mayores que el nivel de significación, por tanto los residuales no están correlacionados.

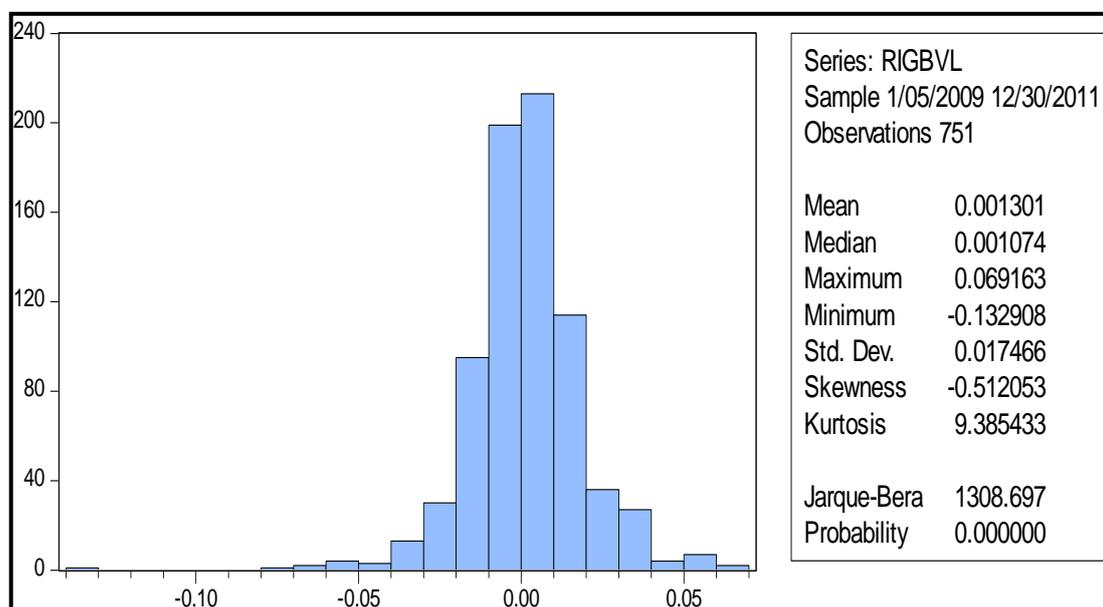
Modelo GARCH a la RIGBVL

Antes de realizar el modelado de la volatilidad diaria de la Rentabilidad del IGBVL (RIGBVL), periodo 2009 – 2011 por medio de los modelos GARCH, se presentarán los hechos estilizados más resaltantes de la RIGBVL, características de toda serie financiera.

EXCESO DE CURSTOSIS

Se inicia el análisis de la rentabilidad diaria del IGBVL, observando el histograma y sus estadísticas principales.

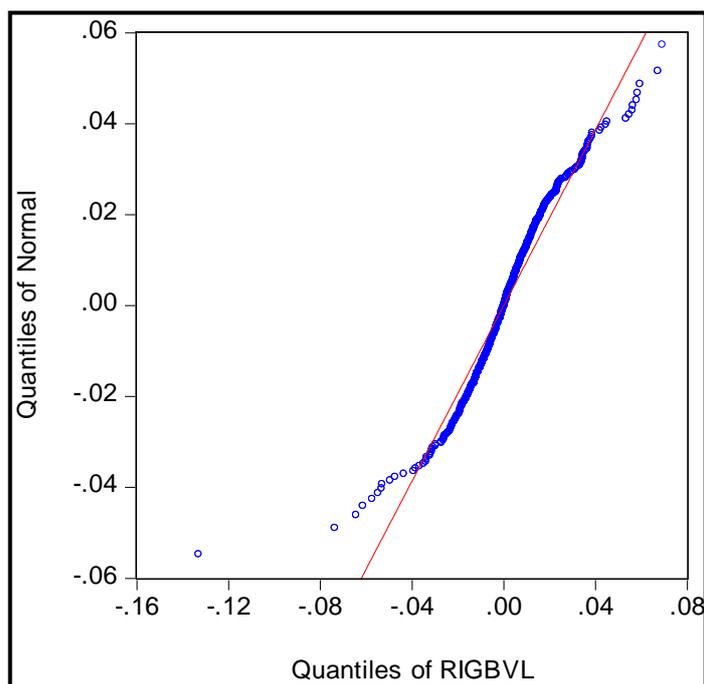
Figura 2:
Histograma de la RIGBVL diaria, periodo 2009 - 2011



En la figura 2, se observa que la distribución de la rentabilidad diaria del IGBVL es leptocúrtica (una de las principales características de las series financieras) por que el coeficiente de Kurtosis de la RIBVL (9.3854) es mayor que el coeficiente que se obtiene de una distribución normal (3.00). Esta es una prueba clara que existe un mayor número de valores extremos de los que se esperaba de una distribución normal estándar. El p_value asociado al estadístico de prueba de Jarque-Bera muestra que la rentabilidad diaria del IGBVL no sigue una distribución normal.

Otra forma de corroborar que distribución de la rentabilidad diaria del IGBVL sigue una distribución normal es por medio del gráfico Quantile- Quantile, Ver Figura 3, se puede observar que esta tiene forma de “S”, lo que indica que la rentabilidad diaria del IGBVL no se distribuye en forma normal y además tiene valores extremos.

Figura 3:
Quantile- Quantile de la RIGVBL diaria, periodo 2009 - 2011



AGRUPAMIENTO DE LA VOLATILIDAD

Otra de las características relevantes en las series financieras es el agrupamiento de la volatilidad, es decir, cuando la volatilidad es elevada es probable que permanezca baja. Para comprobar si existen clusters de volatilidad se traza el siguiente correlograma de los errores al cuadrado del modelo AR (1) para la RIGVBL diaria, periodo 2009 – 2011:

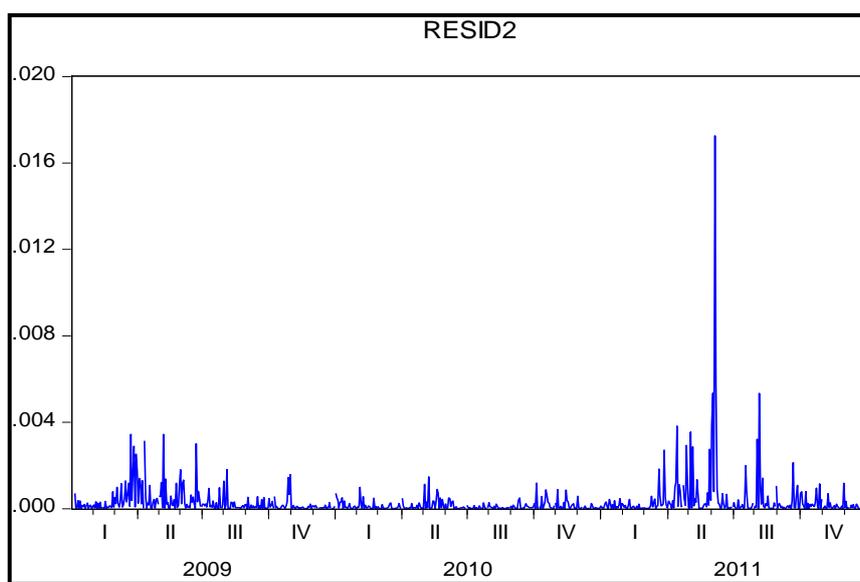
Cuadro 9:
Correlograma de los errores al cuadrado del modelo AR (1) de la RIGBVL

Date: 08/09/13 Time: 00:31						
Sample: 1/05/2009 12/30/2011						
Included observations: 750						
	Partial					
Autocorrelation	Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
. **	. **	1	0.257	0.257	49.783	0.000
. **	. **	2	0.305	0.255	119.75	0.000
. **	. *	3	0.254	0.149	168.62	0.000
. *	.	4	0.107	-	177.21	0.000

					0.047		
. *		.		5	0.128	0.018	189.67 0.000
					-		
.		.		6	0.058	0.019	192.20 0.000
.		.		7	0.059	0.015	194.82 0.000
					-		
.		.		8	0.027	0.015	195.36 0.000
					-		
.		.		9	0.019	0.001	195.64 0.000
.		.		10	0.036	0.023	196.61 0.000
.		.		11	0.041	0.035	197.89 0.000
					-		
.		.		12	0.017	0.012	198.12 0.000
.		.		13	0.059	0.039	200.80 0.000
					-		
.		.		14	0.007	0.026	200.84 0.000
.		.		15	0.037	0.017	201.90 0.000
.		.		16	0.059	0.041	204.59 0.000
.		.		17	0.045	0.025	206.17 0.000
. *		.		18	0.081	0.040	211.18 0.000
					-		
.		.		19	0.034	0.018	212.05 0.000
					-		
.		.		20	0.031	0.019	212.77 0.000
. *		. *		21	0.109	0.092	221.91 0.000
.		.		22	0.043	0.005	223.37 0.000
. *		.		23	0.091	0.036	229.77 0.000
					-		
.		.		24	0.042	0.028	231.12 0.000
					-		
.		.		25	0.035	0.006	232.06 0.000
					-		
.		.		26	0.034	0.007	232.97 0.000
. *		. *		27	0.091	0.093	239.38 0.000
.		.		28	0.052	0.003	241.45 0.000
. *		.		29	0.089	0.043	247.66 0.000
					-		
.		.		30	0.043	0.026	249.11 0.000
.		.		31	0.073	0.033	253.29 0.000
					-		
.		.		32	0.021	0.041	253.62 0.000
.		.		33	0.047	0.025	255.37 0.000
. *		.		34	0.075	0.036	259.84 0.000
					-		
.		.		35	0.013	0.011	259.97 0.000
. *		. *		36	0.113	0.080	269.98 0.000

Se observa, Ver Cuadro 9, que todas probabilidades en el correlograma son inferiores al 5%, por lo tanto, se verifica que la rentabilidad diaria del IGBVL presenta agrupamientos de volatilidades (clusters). Ahora analicemos el grafico de la rentabilidad del IGBVL al cuadrado.

Figura 4:
Errores al cuadrado del modelo AR (1) de la RIGBVL



Se observa, Ver Figura 4, que cuando la volatilidad es elevada esta permanece elevada y cuando baja esta continua siendo baja, confirmando de nuevo el agrupamiento de la volatilidad. Una vez presentada las características de la RIGBVL, continuamos con la modelación de la volatilidad de la RIGBVL, bajo el modelo GARCH.

EXISTENCIA DE EFECTO ARCH

Para determinar si existe la presencia del efecto ARCH se realiza el correlograma de los residuos al cuadrado del modelo AR (1) para la RIGBVL diaria, periodo 2009 - 2011.

Cuadro 10:
Función de autocorrelación simple y parcial: Errores al cuadrado del modelo
AR (1) de la RIGBVL

Date: 08/07/13 Time: 23:59 Sample: 1/07/2009 12/30/2011 Included observations: 750 Q-statistic probabilities adjusted for 1 ARMA term(s)						
Partial		AC	PAC	Q-Stat	Prob	
Autocorrelation	Correlation					
. **		. **		1	0.257	0.257 49.783
. **		. **		2	0.305	0.255 119.75 0.000
. **		. *		3	0.254	0.149 168.62 0.000
					-	
. *		.		4	0.107	0.047 177.21 0.000
. *		.		5	0.128	0.018 189.67 0.000
					-	
.		.		6	0.058	0.019 192.20 0.000
.		.		7	0.059	0.015 194.82 0.000
					-	
.		.		8	0.027	0.015 195.36 0.000
					-	
.		.		9	0.019	0.001 195.64 0.000
.		.		10	0.036	0.023 196.61 0.000
.		.		11	0.041	0.035 197.89 0.000
					-	
.		.		12	0.017	0.012 198.12 0.000
.		.		13	0.059	0.039 200.80 0.000
					-	
.		.		14	0.007	0.026 200.84 0.000
.		.		15	0.037	0.017 201.90 0.000
.		.		16	0.059	0.041 204.59 0.000
.		.		17	0.045	0.025 206.17 0.000
. *		.		18	0.081	0.040 211.18 0.000
					-	
.		.		19	0.034	0.018 212.05 0.000
					-	
.		.		20	0.031	0.019 212.77 0.000
. *		. *		21	0.109	0.092 221.91 0.000
.		.		22	0.043	0.005 223.37 0.000
. *		.		23	0.091	0.036 229.77 0.000
					-	
.		.		24	0.042	0.028 231.12 0.000

				-				
.			.		25	0.035	0.006	232.06 0.000
								-
.			.		26	0.034	0.007	232.97 0.000
.	*		.	*	27	0.091	0.093	239.38 0.000
.			.		28	0.052	0.003	241.45 0.000
.	*		.		29	0.089	0.043	247.66 0.000
								-
.			.		30	0.043	0.026	249.11 0.000
.			.		31	0.073	0.033	253.29 0.000
								-
.			.		32	0.021	0.041	253.62 0.000
.			.		33	0.047	0.025	255.37 0.000
.	*		.		34	0.075	0.036	259.84 0.000
								-
.			.		35	0.013	0.011	259.97 0.000
.	*		.	*	36	0.113	0.080	269.98 0.000

Se observa, Ver Cuadro 10, la posible existencia de volatilidad condicional heteroscedástica en los errores, debido a que las probabilidades que muestras en el grafico indican que los valores de autocorrelación de los residuos elevados al cuadrado son significativos. Para validar la posible existencia de heteroscedasticidad condicional en la varianza, se efectúa el test ARCH-LM (Cuadro 11) sobre los residuos al cuadrado de la regresión de la media que contiene el termino AR (1).

El contraste de hipótesis es el siguiente:

$$H_0: \text{No existe efecto ARCH}$$

$$H_1: \text{Existe efecto ARCH}$$

Cuadro 11:

Test ARCH-LM para la RIGBVL

Heteroskedasticity Test: ARCH			
F-statistic	52.90701	Prob. F(1,747)	0.0000
Obs*R-squared	49.53995	Prob. Chi-Square(1)	0.0000

Test Equation:				
Dependent Variable: RESID^2				
Method: Least Squares				
Date: 08/06/13 Time: 22:42				
Sample (adjusted): 1/08/2009 12/30/2011				
Included observations: 749 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000226	3.27E-05	6.908203	0.0000
RESID^2(-1)	0.257161	0.035355	7.273721	0.0000
R-squared	0.066141	Mean dependent var	0.00030	5
Adjusted R-squared	0.064891	S.D. dependent var	4	0.00087
S.E. of regression	0.000845	Akaike info criterion	0	11.3109
Sum squared resid	0.000534	Schwarz criterion	7	11.2985
Log likelihood	4237.932	Hannan-Quinn criter.	5	2.13041
F-statistic	52.90701	Durbin-Watson stat	7	
Prob(F-statistic)	0.000000			

La probabilidad asociada al estadístico F de contraste se encuentra en la región de rechazo de la hipótesis nula, es decir, se rechaza la hipótesis nula de varianza constante y se valida la existencia de heteroscedasticidad. Con base en esta información se procede a estimar de nuevo el modelo.

A continuación se procede a estimar volatilidad de la rentabilidad diaria de Índice General de la Bolsa de Valores de Lima, por medio de los modelos GARCH, para la serie de la RIGBVL los posibles modelos a los cuales se puede ajustar la serie luego de analizar la función de autocorrelación simple y parcial de los errores al cuadrado del modelo AR(1) (Ver Cuadro 10) son: GARCH (1,1), GARCH (1,2), GARCH (2,1), ARCH (1) y GARCH (2,2). En seguida se procede a mostrar los resultados obtenidos al hacer uso del software Eviews.

Cuadro 12:
Modelo GARCH (1,1) para la RIGBVL

Dependent Variable: RIGBVL				
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution				
Date: 08/06/13 Time: 23:04				
Sample (adjusted): 1/07/2009 12/30/2011				
Included observations: 750 after adjustments				
Convergence achieved after 11 iterations				
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)				
GARCH = C(2) + C(3)*RESID(-1)^2 + C(4)*GARCH(-1)				
Variable	Coefficien t	Std. Error	z-Statistic	Prob.
AR(1)	0.171726	0.043877	3.913816	0.0001
Variance Equation				
C	1.47E-05	4.28E-06	3.435723	0.0006
RESID(-1)^2	0.200177	0.033224	6.025075	0.0000
GARCH(-1)	0.757024	0.035828	21.12917	0.0000
R-squared	-0.012725	Mean dependent var	0.00128	
Adjusted squared	-0.012725	S.D. dependent var	3	
S.E. of regression	0.017582	Akaike info criterion	6	
Sum squared resid	0.231534	Schwarz criterion	6	
Log likelihood	2083.261	Hannan-Quinn criter.	2	
Durbin-Watson stat	2.206977			
Inverted AR Roots	.17			

Cuadro 13:
Modelo GARCH (1,2) para la RIGBVL

Dependent Variable: RIGBVL				
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution				
Date: 08/06/13 Time: 23:05				
Sample (adjusted): 1/07/2009 12/30/2011				
Included observations: 750 after adjustments				
Convergence achieved after 21 iterations				
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)				
GARCH = C(2) + C(3)*RESID(-1)^2 + C(4)*GARCH(-1) + C(5)*GARCH(-2)				
Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
AR(1)	0.168513	0.043472	3.876343	0.0001
Variance Equation				
C	1.62E-05	4.66E-06	3.488893	0.0005
RESID(-1)^2	0.176652	0.040774	4.332525	0.0000
GARCH(-1)	1.099606	0.160922	6.833185	0.0000
GARCH(-2)	-0.324571	0.120261	-2.698882	0.0070
R-squared	-0.012044	Mean dependent var	0.00128	3
Adjusted R-squared	-0.012044	S.D. dependent var	0.01747	1
S.E. of regression	0.017576	Akaike info criterion	5.54854	5
Sum squared resid	0.231379	Schwarz criterion	5.51774	4
Log likelihood	2085.704	Hannan-Quinn criter.	5.53667	7
Durbin-Watson stat	2.200790			
Inverted AR Roots	.17			

Cuadro 14:
Modelo GARCH (2,1) para la RIGBVL

Dependent Variable: RIGBVL				
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution				
Date: 08/06/13 Time: 23:06				
Sample (adjusted): 1/07/2009 12/30/2011				
Included observations: 750 after adjustments				
Convergence achieved after 12 iterations				
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)				
GARCH = C(2) + C(3)*RESID(-1)^2 + C(4)*RESID(-2)^2 + C(5)*GARCH(-1)				
Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
AR(1)	0.158375	0.037507	4.222539	0.0000
Variance Equation				
C	3.33E-05	8.55E-06	3.894739	0.0001
RESID(-1)^2	0.069950	0.041600	1.681462	0.0927
RESID(-2)^2	0.276969	0.066613	4.157853	0.0000
GARCH(-1)	0.553576	0.069271	7.991433	0.0000
R-squared	-0.010028	Mean dependent var	0.00128	3
Adjusted R-squared	-0.010028	S.D. dependent var	0.01747	1
S.E. of regression	0.017559	Akaike info criterion	5.55920	2
Sum squared resid	0.230918	Schwarz criterion	5.52840	2
Log likelihood	2089.701	Hannan-Quinn criter.	5.54733	4
Durbin-Watson stat	2.181168			
Inverted AR Roots	.16			

Cuadro 15:
Modelo ARCH (1) para la RIGBVL

Dependent Variable: RIGBVL				
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution				
Date: 08/06/13 Time: 23:07				
Sample (adjusted): 1/07/2009 12/30/2011				
Included observations: 750 after adjustments				
Convergence achieved after 31 iterations				
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)				
GARCH = C(2) + C(3)*RESID(-1)^2				
Variable	Coefficien t	Std. Error	z-Statistic	Prob.
AR(1)	0.340793	0.030447	11.19316	0.0000
Variance Equation				
C	0.000187	8.93E-06	20.91903	0.0000
RESID(-1)^2	0.423470	0.064180	6.598214	0.0000
R-squared	-0.077911	Mean dependent var	0.00128	
Adjusted squared	-0.077911	R- var	3	
S.E. of regression	0.018139	S.D. dependent var	1	5.37577
Sum squared resid	0.246438	Akaike info criterion	5	5.35729
Log likelihood	2018.916	Schwarz criterion	4	5.36865
Durbin-Watson stat	2.503525	Hannan-Quinn criter.	4	
Inverted AR Roots	.34			

Cuadro 16:
Modelo GARCH (2,2) para la RIGBVL

Dependent Variable: RIGBVL				
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution				
Date: 08/06/13 Time: 23:07				
Sample (adjusted): 1/07/2009 12/30/2011				
Included observations: 750 after adjustments				
Convergence achieved after 12 iterations				
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)				
GARCH = C(2) + C(3)*RESID(-1)^2 + C(4)*RESID(-2)^2 + C(5)*GARCH(-1) + C(6)*GARCH(-2)				
Variable	Coefficien t	Std. Error	z-Statistic	Prob.
AR(1)	0.161026	0.038123	4.223850	0.0000
Variance Equation				
C	3.54E-05	9.34E-06	3.792948	0.0001
RESID(-1)^2	0.083103	0.042688	1.946759	0.0516
RESID(-2)^2	0.308789	0.067614	4.566933	0.0000
GARCH(-1)	0.335158	0.177331	1.890017	0.0588
GARCH(-2)	0.169303	0.137150	1.234436	0.2170
R-squared	-0.010535	Mean dependent var	0.00128	3
Adjusted squared	-0.010535	R-S.D. dependent var	0.01747	1
S.E. of regression	0.017563	Akaike info criterion	5.55684	7
Sum squared resid	0.231034	Schwarz criterion	5.51988	6
Log likelihood	2089.817	Hannan-Quinn criter.	5.54260	5
Durbin-Watson stat	2.186313			
Inverted AR Roots	.16			

De acuerdo a los resultados obtenidos (Ver Cuadro 17), el modelo óptimo que se considera que mejor simula el comportamiento del proceso es el modelo GARCH (1,1), se llega a esta decisión dado que los modelos GARCH (2,1) y GARCH (2,2) estiman parámetros que no son significativos a un 5%, así mismo el modelo GARCH (1,2) y ARCH (1) brinda estimaciones significativas pero al comparar los valores del criterio de información de Akaike (AIC) y el criterio de información de Schwarz (BIC) con el modelo GARCH (1,1), este último presenta menor valor en cada criterio (-5.544696 y -5.520056), con lo cual se sustenta la elección del modelo GARCH (1,1).

Cuadro 17:
Resultados al aplicar los modelos GARCH y ARCH

Modelo	Parámetros	Coefficientes	Significación	Estadísticos	
GARCH(1,1)	C	1.47E-05	0.0006	AIC	-5.544696
	RESID(-1)^2	0.200177	0.0000	BIC	-5.520056
	GARCH(-1)	0.757024	0.0000		
GARCH(1,2)	C	1.62E-05	0.0005	AIC	-5.548545
	RESID(-1)^2	0.176652	0.0000	BIC	-5.517744
	GARCH(-1)	1.099606	0.0000		
	GARCH(-2)	-0.324571	0.007		
GARCH(2,1)	C	3.33E-05	0.0001	AIC	-5.559202
	RESID(-1)^2	0.06995	0.0927	BIC	-5.528402
	RESID(-2)^2	0.276969	0.0000		
	GARCH(-1)	0.553576	0.0000		
ARCH(1)	C	0.000187	0.0000	AIC	-5.375775
	RESID(-1)^2	0.42347	0.0000	BIC	-5.357294
GARCH(2,2)	C	3.54E-05	0.0001	AIC	-5.556847
	RESID(-1)^2	0.083103	0.0516	BIC	-5.519886
	RESID(-2)^2	0.308789	0.0000		
	GARCH(-1)	0.335158	0.0588		
	GARCH(-2)	0.169303	0.217		

Entonces el modelo será:

$$RIGBVL_t = 0.171726 * RIGBVL_{t-1}$$

$$\sigma_t^2 = 1.47 * 10^{-5} + 0.200177\varepsilon_{t-1}^2 + 0.757024\sigma_{t-1}^2$$

Al igual que la modelación de la media de la RIGBVL, modelo AR (1), se procedió a realizar la validez del modelo ajustado, basándose en los resultados que se obtuvo de la función de correlación de los residuos y el Test ARCH para heterocedasticidad.

Cuadro 18:

Función de autocorrelación simple y parcial: Errores del modelo GARCH (1,1)

Date: 08/14/13 Time: 23:31 Sample: 1/07/2009 12/30/2011 Included observations: 750 Q-statistic probabilities adjusted for 1 ARMA term(s)						
Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat Prob
				-	-	
.		.		1	0.000	0.000 0.0002
.		.		2	0.036	0.036 0.9576 0.328
.		.		3	0.048	0.048 2.6810 0.262
.		.		4	0.056	0.055 5.0453 0.169
.		.		5	0.027	0.024 5.5979 0.231
.		.		6	0.015	0.009 5.7673 0.330
.		.		7	0.019	0.012 6.0284 0.420
				-	-	
.		.		8	0.013	0.020 6.1662 0.520
				-	-	
.		.		9	0.042	0.048 7.5399 0.480
.		.		10	0.033	0.030 8.3708 0.497
				-	-	
.		.		11	0.012	0.010 8.4829 0.582
.		.		12	0.042	0.045 9.8312 0.546

				-	-
.		.		13	0.036 0.032 10.810 0.545
.		.		14	0.008 0.005 10.863 0.622
				-	-
.		.		15	0.051 0.053 12.868 0.537
				-	-
.		.		16	0.027 0.029 13.442 0.568
				-	-
.		.		17	0.012 0.011 13.549 0.632
				-	-
.		.		18	0.035 0.029 14.490 0.632
.		.		19	0.035 0.047 15.456 0.630
.		.		20	0.013 0.023 15.588 0.685
				-	-
.		.		21	0.014 0.006 15.736 0.733
				-	-
.		.		22	0.031 0.037 16.490 0.741
.		.		23	0.019 0.018 16.782 0.775
.		.		24	0.028 0.019 17.378 0.790
				-	-
.		.		25	0.005 0.001 17.398 0.831
				-	-
.		.		26	0.013 0.016 17.521 0.862
				-	-
.		.		27	0.031 0.031 18.294 0.865
.		.		28	0.004 0.008 18.309 0.894
				-	-
.		.		29	0.009 0.008 18.369 0.916
.		.		30	0.010 0.011 18.442 0.935
				-	-
.		.		31	0.056 0.064 20.913 0.891
.		.		32	0.018 0.024 21.174 0.907
.		.		33	0.063 0.067 24.288 0.834
.		.		34	0.052 0.061 26.387 0.786
				-	-
.		.		35	0.019 0.022 26.679 0.810
.		.		36	0.057 0.047 29.275 0.740

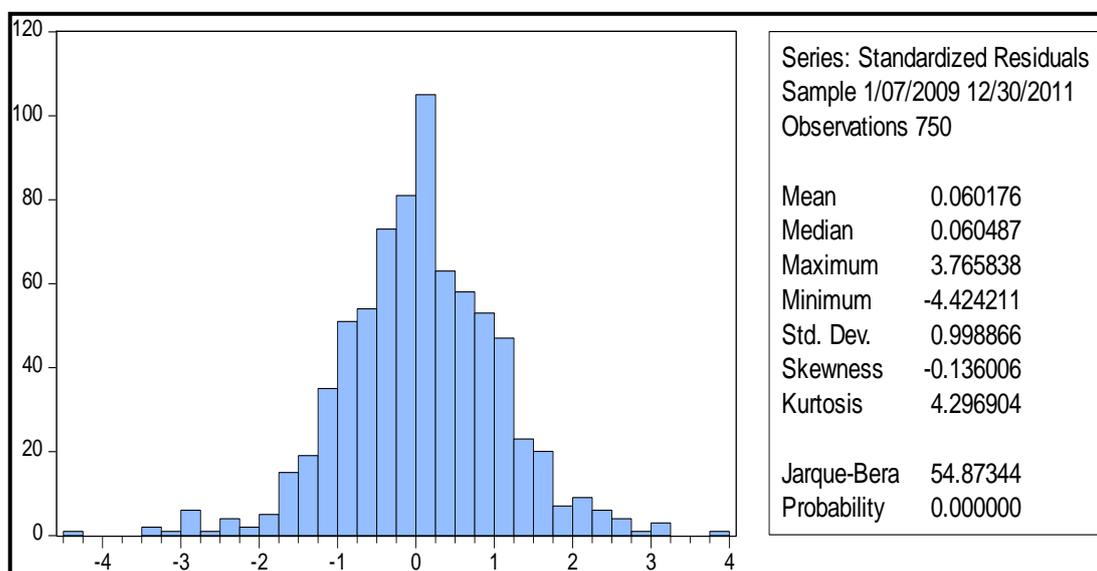
En el Cuadro 18, se puede observar que los valores obtenidos para la función de autocorrelación simple y parcial son valores que se encuentran cercanos a cero, esto indica la no existencia de correlación entre los errores, esto se corrobora con la probabilidad para cada retardo, los cuales son valores mayores al nivel de significación del 5%, criterio necesario para no rechazar la hipótesis, (residuales no correlacionados).

Cuadro 19:
Test ARCH-LM para el modelo GARCH(1,1)

Heteroskedasticity Test: ARCH				
F-statistic	2.276557	Prob. F(1,747)		0.1318
Obs*R-squared	2.275717	Prob. Chi-Square(1)		0.1314
Test Equation:				
Dependent Variable: WGT_RESID^2				
Method: Least Squares				
Date: 08/14/13 Time: 23:32				
Sample (adjusted): 1/08/2009 12/30/2011				
Included observations: 749 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.053099	0.075383	13.96998	0.0000
WGT_RESID^2(-1)	-0.055102	0.036520	-1.508827	0.1318
R-squared	0.003038	Mean dependent var	0.99793	
Adjusted R-squared	0.001704	var	2	
S.E. of regression	1.804152	S.D. dependent var	1	1.80569
Sum squared resid	2431.459	Akaike info criterion	5	4.02072
Log likelihood	-1503.762	Schwarz criterion	9	4.03305
F-statistic	2.276557	Hannan-Quinn criter.	8	1.98918
Prob(F-statistic)	0.131766	Durbin-Watson stat	8	

Al analizar el resultado del Test ARCH-LM (Ver Cuadro 19), se confirmó que al modelar la volatilidad de la RIGBVL con el modelo GARCH (1,1) se ha eliminado el efecto de heterocedastidad en los residuos, el valor del p. value es mayor al 5% de nivel de significación, con lo que la hipótesis nula de no presencia de heterocedastidad no es rechazada.

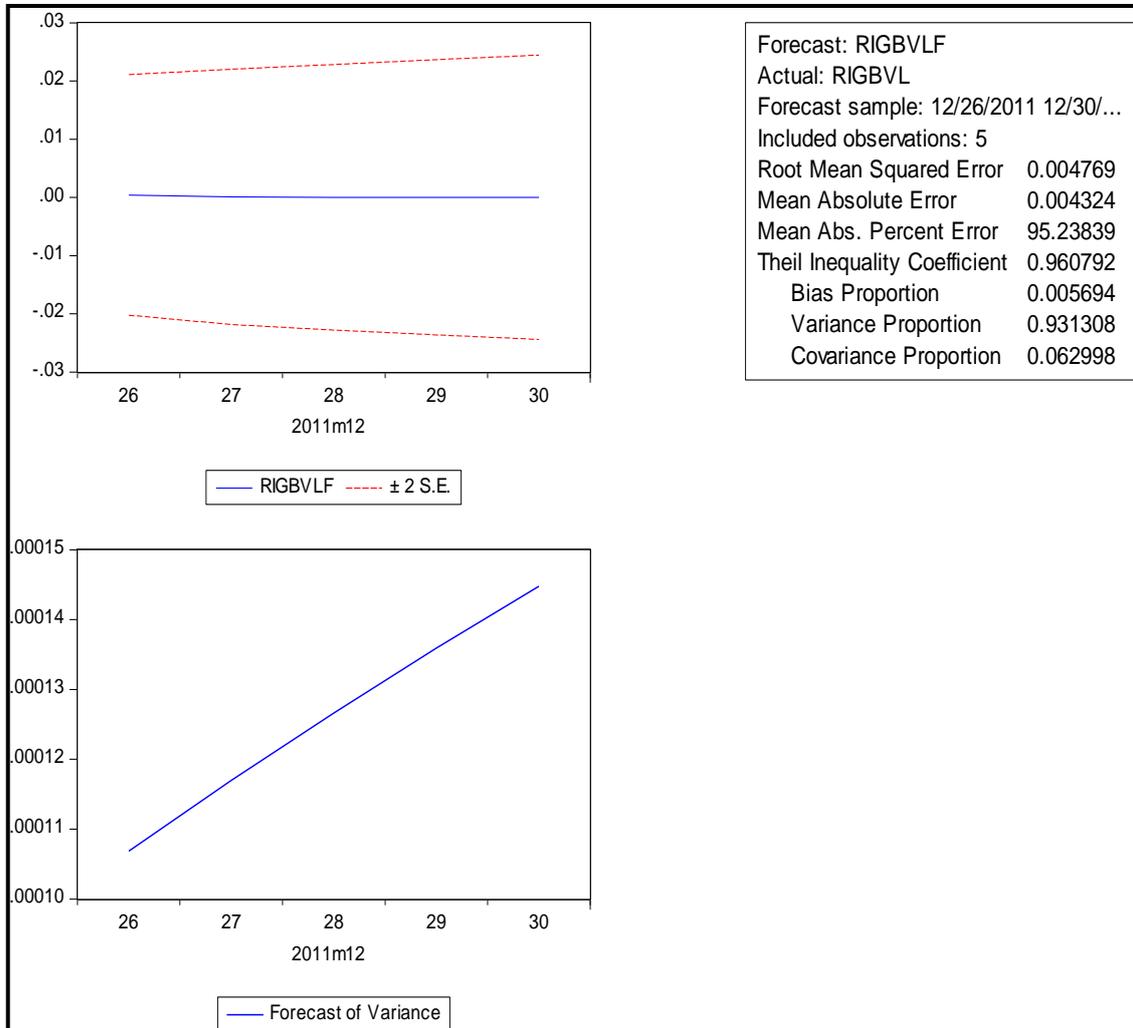
Figura 5:
Histograma de Errores del modelo GARCH (1,1)



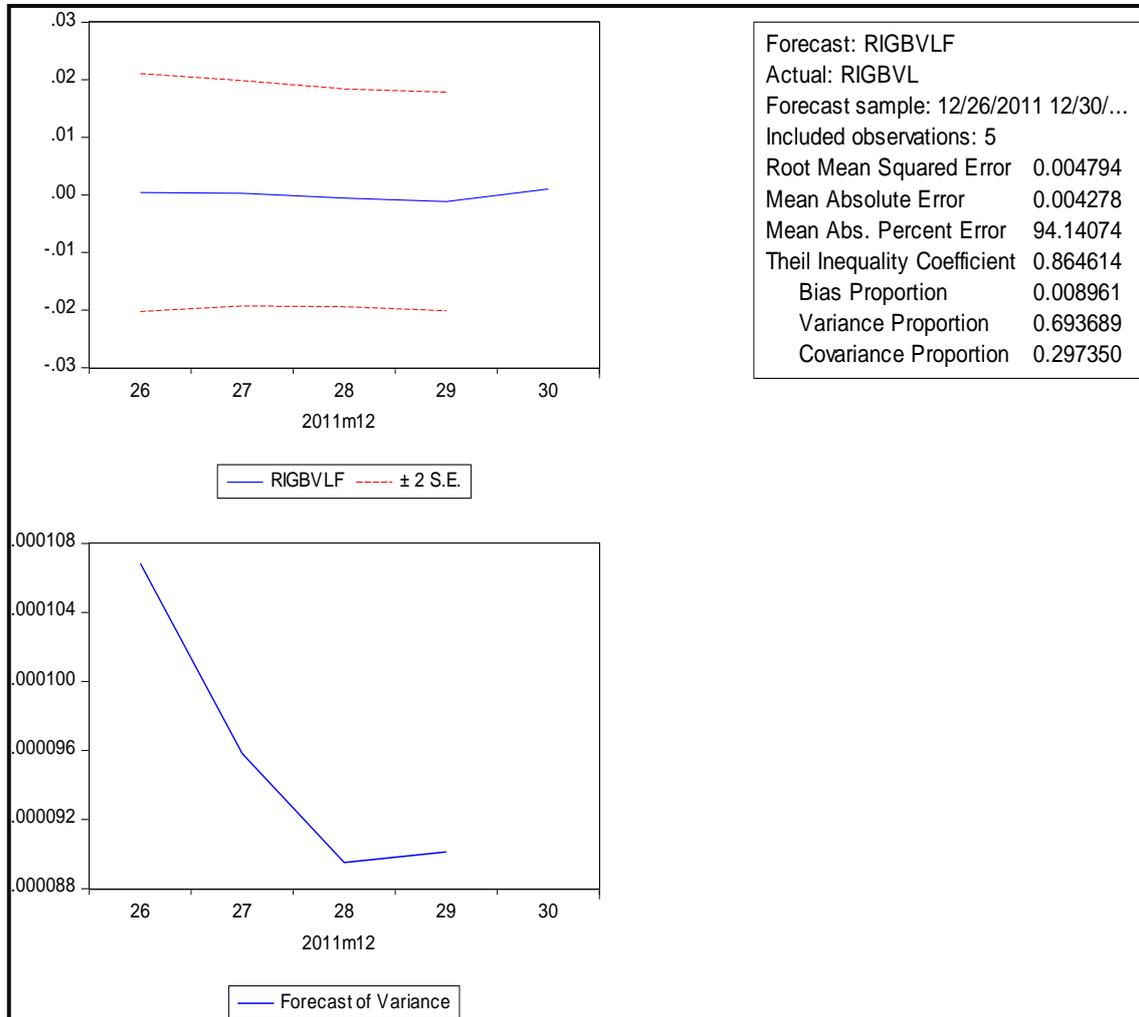
Otra validación que se realiza es el ajuste de los errores a una distribución normal, esto se comprueba con la información de la Figura 5. Para validar la normalidad de los errores se realizó el Test de Jarque-Bera, donde la hipótesis nula es la normalidad de los errores, dado que el p_value es menor al 5% de nivel de significación, se concluye que los errores no se ajustan a una distribución normal, sin embargo estos errores están próximos a mencionado ajuste porque el valor de Kurtosis es 4.2969 tiene un valor cercano a 3, (Kurtosis de una distribución normal).

Por último para validar que el modelo GARCH (1,1) es adecuado para modelar la volatilidad de la RIGBVL se realizó el pronóstico de la última semana del mes de Diciembre del 2011. El software EViews permite realizar dos tipos de pronóstico: dinámico y estático, los resultados obtenidos para estos tipos de pronósticos se presenta en el Cuadro 20 y Cuadro 21 respectivamente.

Cuadro 20:
Pronostico dinámico de la RIGBVL, Ultima semana de Diciembre 2011
Modelo GARCH (1,1)



Cuadro 21:
Pronostico estático de la RIGBVL, Ultima semana de Diciembre 2011
Modelo GARCH (1,1)



De los resultados presentados se puede decir que ambas formas de predicción con el modelo GARCH (1,1) son adecuadas porque el coeficiente de desigualdad de Theil es menor a 1, (dinámico 0.9607 y estático 0.8646), esto significa que el modelo utilizado es mejor que el modelo de caminos aleatorios.

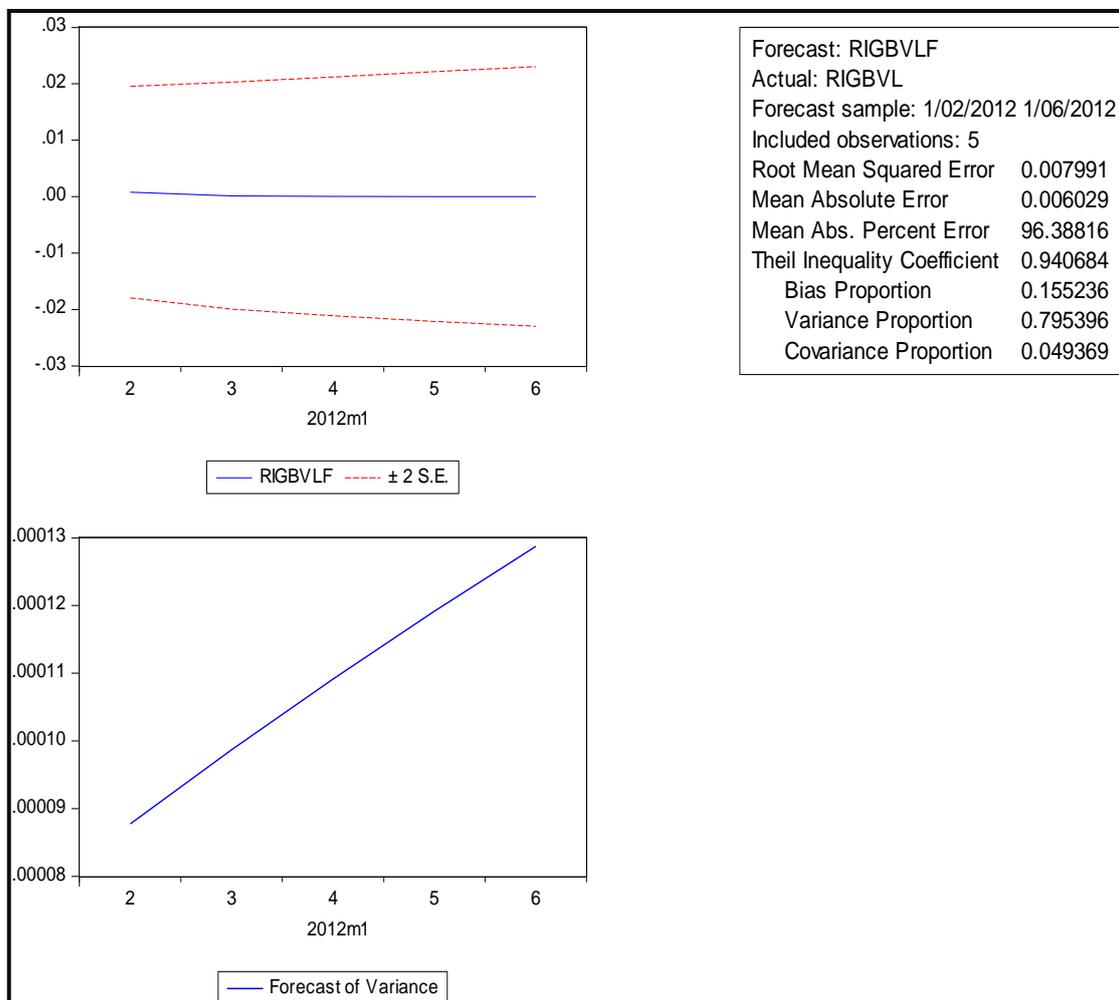
Otro valor que certifica que los tipos de pronósticos son correctos es la media absoluta de errores porcentuales, (MAPE), debido a que el pronóstico dinámico y estático son menores al 100%, 95.23839% y 94.14074% respectivamente.

Para determinar qué método de pronóstico es adecuado para la RIGVBL, se analizará el valor de la raíz cuadrada de los errores al cuadrado (RMSE), donde al realizar el método de pronóstico dinámico se obtuvo el valor de 0.004769 y con el método de pronóstico estático se obtuvo 0.004794, con lo cual se puede decir que el método de pronóstico estático es ligeramente mejor.

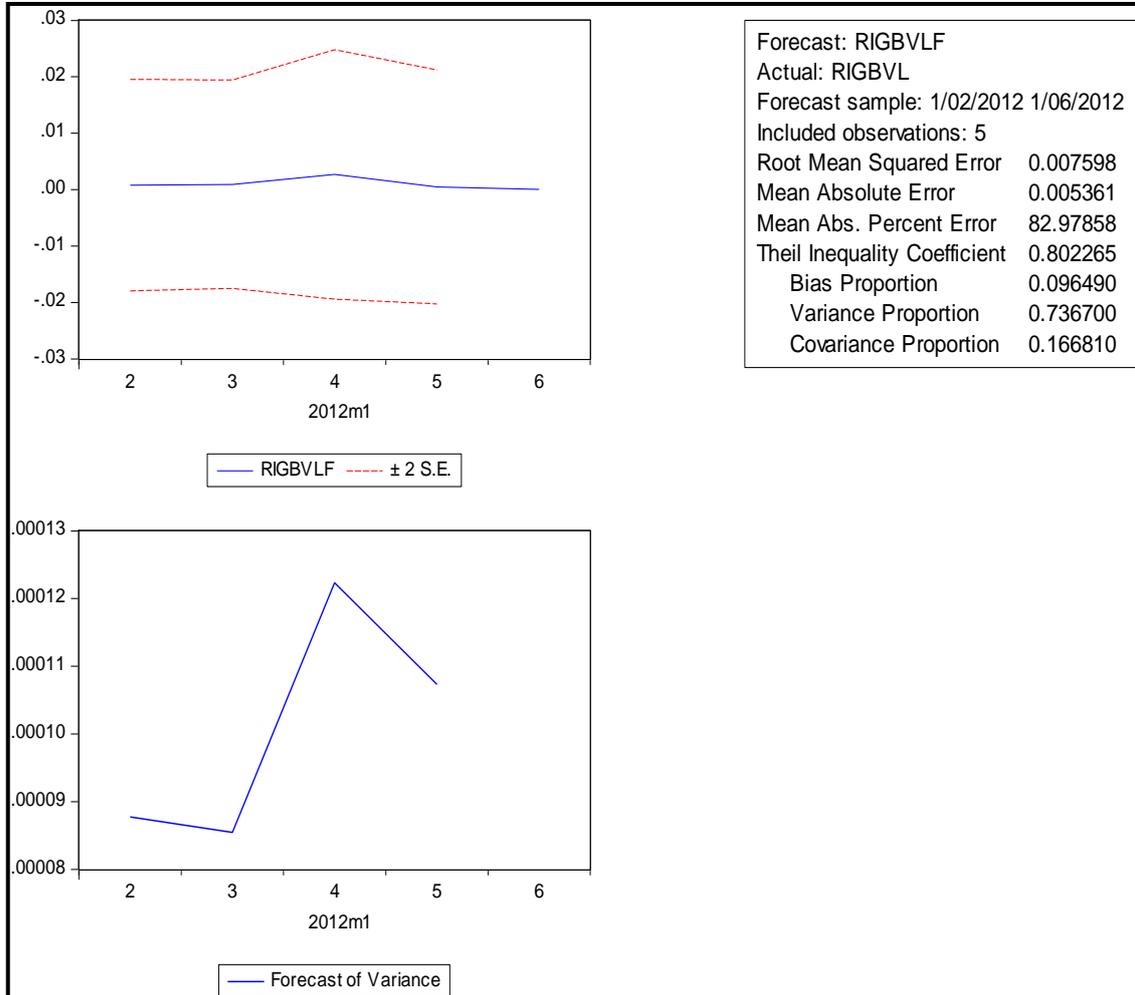
Por último se realizó el pronóstico de la RIGBVL para la primera semana de Enero del 2012 (ver Cuadro 22 y Cuadro 23), donde al realizar el mismo análisis hecho para el pronóstico de la RIGBVL de la última semana de diciembre del 2011, se concluye que ambos métodos de pronósticos son adecuados con el modelo GARCH (1,1) ya que el coeficiente de desigualdad de Theil para los dos métodos de pronóstico: dinámico y estático son inferiores a uno, 0.940684 y 0.802265 respectivamente, esta afirmación se refuerza con el valor de la media absoluta de errores porcentuales, (MAPE), inferior al 100%, el valor MAPE para el pronóstico dinámico es 96.38816 y para el pronóstico estático es 82.97858.

Se puede decir que el pronóstico de la volatilidad de la RIGBVL de la primera semana de Enero del 2012, mediante el modelo GARCH (1,1), es mejor mediante el método de pronóstico estático por que el valor de la raíz cuadrada de los errores al cuadrado (RMSE), 0.007598, es menor que el valor obtenido mediante el método de pronóstico dinámico, 0.007991.

Cuadro 22:
Pronostico dinámico de la RIGBVL, Primera semana de Enero 2012
Modelo GARCH (1,1)



Cuadro 23:
Pronostico estático de la RIGBVL, Primera semana de Enero 2012
Modelo GARCH (1,1)



V. CONCLUSIONES

1. La serie original del Índice General de la Bolsa de Valores de Lima, periodo 2009 - 2011 no es estacionaria, por lo que se trabajó con el rendimiento diario del índice general de la Bolsa de Valores de Lima (IGBVL) que es estacionaria.
2. La media de la RIGBVL diario, periodo 2009 – 2011, se ajusta mejor al modelo AR (1).
3. Existe la presencia del efecto GARCH en los errores del modelo AR (1) de la RIGBVL diario, periodo 2009 – 2011, se corroboró mediante el Test de ARCH-LM.
4. El modelo que mejor ajusta la volatilidad de la RIGBVL diario, periodo 2009 – 2011, es el modelo GARCH (1,1) debido a que los parámetros estimados del modelo son significativos y porque los valores de los criterios de información de Akaike y Schwarz son menores a diferencia de los criterios de información obtenidos para modelos GARCH (1,2), GARCH (2,1), GARCH (1,0) y GARCH (2,2).
5. Al realizar el proceso de validación del modelo GARCH (1,1), se concluye que los errores de este no se distribuyen de forma normal, pero tanto el histograma como el valor de kurtosis dan indicios que los errores no se encuentran tan lejos de seguir un comportamiento normal.
6. Los pronósticos obtenidos para la volatilidad de la primera semana de enero del año 2012 con el modelo GARCH (1,1), son mejores por medio del método de pronóstico estático respecto al método de pronóstico dinámico, debido a que el valor de la raíz cuadrada de los errores al cuadrado (RMSE) del método de pronóstico estático, 0.007598, es menor que el valor obtenido por el método de pronóstico dinámico, 0.007991.

VI. RECOMENDACIONES

1. Los resultados obtenidos al modelar la media y la volatilidad de la rentabilidad diaria del índice general de la bolsa de valores de lima (RIGBVL) deben tomarse con mucha cautela, debido a que la medición se realizó para un periodo estable posterior a la crisis financiera del año 2008, es decir la serie no presento cambios marcados en su comportamiento permitiendo realizar un mejor proceso de modelación.
2. En el proceso de modelación de la RIGBVL, no se analizó la presencia de quiebres estructurales, debido a su comportamiento estable en los años 2009 - 2011; el análisis de quiebres estructurales podría plantearse como parte de un nuevo estudio de la RIGBVL tomando un intervalo de tiempo más amplio y con este análisis plantear un modelo nuevo que logre superar los resultados obtenidos en esta investigación.
3. Es normal realizar el modelado de la volatilidad a partir de la desviación estándar muestral, sin embargo si el periodo es demasiado amplio, no tendrá mucha relevancia para explicar el comportamiento de la volatilidad en el presente y si es demasiado corto, su comportamiento será muy aleatorio. Por esto ha cobrado tanta importancia la estimación de la volatilidad con los modelos GARCH.
4. Por último se recomienda complementar el estudio de los modelos GARCH, a partir de los modelos asimétricos tales como el modelo EGARCH, TGARCH e IGARCH, dado que estos modelos permiten distinguir la magnitud del cambio ante el alza o baja que sufre la RIGBVL.

VII. BIBLIOGRAFIA

1. Abanto, C. (2007). Modelaje de la Volatilidad en el Mercado Peruano de Acciones. (En línea). Revista del Instituto de Investigaciones Económicas y Sociales, Setiembre, Número 4, pp. 68-80. Consultado el 29 de agosto del 2011. Disponible en http://www.bibliotecacentral.uni.edu.pe/pdfs/IECOS/4,2007/art_005.pdf
2. Aydemir, A. (1998), 'Forecast performance of threshold autoregressive models – a Montecarlo Study', UWO. Department of Economics Working Papers.
3. Bejarano, M. (2003). Análisis de Raíces Unitarias para Series de Tiempo, Tesis para Optar el Título de Ingeniero Estadístico e Informático. UNALM, Perú.
4. Breusch, T.S. (1978): Testing for Autocorrelation in Dynamic Linear Models. Australian Economics Papers, 17, pp. 334-355
5. Bollerslev, T. (1986): Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. Journal of Econometrics, 31, pp. 307-327.
6. Campbell, J. y Hentschel, L (1992): An asymmetric model of changing volatility in stocks returns, Journal of Financial Economics, 31, pp.281-318
7. Court, E. y Rengifo E.(2011) Estadísticas y Econometría Financiera, 1 era ed., CENGAGE Learning,2011.
8. De Arce, R. y Mahia, R. (2000): Introducción a los Modelos ARIMA. (En línea). Programa Citius.- Técnicas de Previsión de variables financieras, pp. 3-4 Consultado el 15 de agosto del 2011. Disponible en http://www.uam.es/personal_pdi/economicas/anadelsur/pdf/Box-Jenkins.PDF

9. De Grange, L. (2005): Apuntes de clases Tópicos de Econometría. (En línea). Pontificia Universidad Católica De Chile. Consultado el 23 de Agosto del 2011. Disponible en: http://intrawww.ing.puc.cl/siding/public/ingcursos/cursos_pub/descarga.phtml?id_curso_ic=662&id_archivo=19423
10. Dickey, D. A. y Fuller, W. A. (1979), 'Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root', Journal of the American Statistical Association 76, 427–431.
11. Engle, R. F. (1982): Autoregressive Conditional Heterocedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometría*, 50, pp.987-1008.
12. Fernández, L. (2008). Sistema univariante y multivariante de predicción de la volatilidad para mercados financieros. Proyecto fin de carrera ingeniería informática, ES, Universidad Pontificia Comillas.
13. Figlewski, S. (1997): Forecasting Volatility, Financial Markets, Institutions and Instruments, Volume 6 Number 1, pp. 2-87, 1997.
14. Gil, M. M. y Maya, C. (2008). Modelación de la Volatilidad de los Precios de la Energía Eléctrica en Colombia. (En línea). Revista de Ingenierías Universidad de Medellín, Enero-Junio, Año/Vol. 7, Número 12, pp. 87-114. Consultado el 16 de agosto del 2011. Disponible en <http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=75011517005>
15. Gil, M. M. y Pérez, F. O. (2005). Análisis y Predicción de la Acción de la Empresa Acerías Paz del Río utilizando un Modelo GARCH (1,1) Y Redes Neuronales Artificiales. (En línea). Revista de Ingenierías Universidad de Medellín, Julio-Diciembre, Año/Vol. 4, Número 007, pp. 83-87. Consultado el 16 de agosto del 2011. Disponible en <http://redalyc.uaemex.mx/pdf/750/75004707.pdf>
16. Godfrey, L.G. (1978): Testing Against General Autoregressive and Moving Average Models when the Regressors include Lagged Dependent Variables. *Econometría*, 46, pp.. 1293-1302.
17. Greene, W. (1999), Análisis Económico, 3era ed., Pearson Educacion, Madrid, 1999.

18. Gujarati, D. (2010): *Econometría*, 5ta. Ed. , McGraw-Hill/Interamericana Editores, Mexico D.F. , 2010
19. Hanke, J., Reitsch, A. (1996). *Pronósticos en los negocios*, 5ta. ed. Prentice Hall Hispanoamericana S.A., México., 1996.
20. Jagannathan, L. R. And Runkle, D. (1991): Relationships between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks, Mimeo, Northwestern University.
21. López de Castilla, C. (2000). *Análisis Bayesiano de las Series de Tiempo*, Tesis para Optar el Título de Ingeniero Estadístico e Informático. UNALM, Perú.
22. MacKinnon, JG. (1994): "Approximate asymptotic distribution functions for unit-root and cointegration test". *Journal of Business and Economic Statistics*. vol 12. pp. 167-176.
23. Mandelbrot, B (1963): The variation of certain speculative prices, *Journal of Business*, 36, 394-419
24. Marquez, M. D. (2002). *Modelo Setar Aplicado a la Volatilidad de la Rentabilidad de las Acciones: Algoritmos para su Identificación* (España, Universidad UPC, 2002) Cap. II, pp. 11-13.
25. Nelson D.B. (1991): Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach. *Econometrica*, 59, pp. 347-370.
26. Ospina, F. y Giraldo, D. A. (2009). Aplicación de los Modelos GARCH a la Estimación del VAR de Acciones Colombianas. (En línea). *Revista soluciones de postgrado EIA*, Enero, Número 3, pp. 11-24. Consultado el 17 de agosto del 2011. Disponible en <http://revistapostgrado.eia.edu.co/Revista%20Edici%F3n%20N%BA.3/Soluciones%20N3%20art%201.pdf>
27. Pérez, F. (2006). Modelación de la Volatilidad y Pronósticos del Precio del Café. (En línea). *Revista de Ingenierías Universidad de Medellín*, Julio-Diciembre, Año/Vol. 5 Número 009, pp.45-58. Consultado el 17 de agosto del 2011. Disponible en http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/750/Resumenes/75050905_Resumen_1.pdf

28. Phillips PCB y Perron P (1988): "Testing for a unit root in times series regresion". *Biometrika*, 75, 335-346.
29. Pulido, A. y Perez, J. (2001): *Modelos Econométricos*, 1er. ed., Pirámide, Madrid., 2001.
30. Rodríguez, A. (2009). Análisis de la volatilidad del IGBC en época de crisis (2005-2006). (En línea). *Revista de Economía y Administración*. Consultado el 15 de agosto del 2011. Disponible en http://dali.uao.edu.co:7777/pls/portal/docs/PAGE/UNIAUTONOMA_INVESTIGACIONES/REVISTA_ECONOMIK/NUMEROS/COPY_OF_ULTIMO_NUMERO%20JULIO%20%20DIC/3.1%20RESUMEN%20DE%20TESIS%20ALEJANDRO%20RODRIGUEZ.PDF
31. Sánchez, A. y Reyes, O. (2006). Regularidades Probabilísticas de las Series Financieras y la Familia de Modelos GARCH. (En línea). *Ciencia Ergo Sum*, Julio-Octubre, Año/Vol. 13, Número 02, Universidad Autónoma del Estado de México, pp. 149-156. Consultado el 15 de agosto del 2011. Disponible en <http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=10413205>
32. Sotero, J. (1998). Una transformación estabilizadora de la Varianza en series Cronológicas, Tesis para Optar el Título de Ingeniero Estadístico e Informático. UNALM, Perú.
33. Sotomayor, R. N. (1987). Análisis de Series de Tiempo mediante Modelos ARIMA con fines de pronósticos, comparación con los Modelos de Descomposición, Tesis para Optar el Título de Ingeniero Estadístico. UNALM, Perú.
34. Tsay R.S. (2002): *Analysis of Financial Time Series*, John Wiley & Sons, New York. Glostent.